

L'ANALYSE DE FOURIER EN PHYSIQUE

(ou voyage au pays de Fourier)

Sébastien Renaux-Petel

CNRS-IAP



Fleurance - 9 août 2015



Plan du voyage

1) Introduction générale

2) Séries de Fourier

3) Diffusion de la chaleur

4) Transformée de Fourier et diffraction

5) Traitement d'images

6) Physique quantique

INTRODUCTION GENERALE

Fourier vu en 1862

« Il y avait à l'académie des sciences un Fourier célèbre que la postérité a oublié et dans je ne sais quel grenier un Fourier obscur dont l'avenir se souviendra. »

chapitre “En l'année 1817” du troisième livre des [Misérables](#), Victor Hugo

Fourier vu en 1862

- Premier Fourier : **mathématicien et physicien Joseph Fourier**, connu principalement pour l'analyse dite de Fourier.



- Second Fourier : **socialiste utopiste Charles Fourier**, connu pour avoir imaginé les phalanstères



Fourier vu en 1862

- Objectivement, Hugo s'est trompé sur la première partie de la phrase.
- Charles Fourier n'est pas oublié, mais l'héritage de Joseph Fourier est colossal.
- Les concepts qu'il a introduits sont **utilisés au quotidien par nombre d'ingénieurs et chercheurs, et ont révolutionné notre quotidien.**

Fourier vu en 1862

- Victor Hugo ni ignorant ni méprisant de l'importance des sciences, et des contributions de Fourier en particulier.
- En fait, l'impact de ses travaux a éclaté seulement beaucoup plus tard, notamment avec le développement de l'informatique.

Idée de base

- Analyse de Fourier : décomposer un signal (son, image, mesure physique quelconque, etc) en fréquences.
- Applications dans **tous les domaines scientifiques** : mathématiques pures, informatique, physique, biologie, médecine ...
- Quelques exemples : électricité, compression d'images, IRM, diffraction, mécanique quantique, cosmologie.
- Concept tellement fondamental qu'on pourrait le comparer à l'invention de l'écriture décimale.

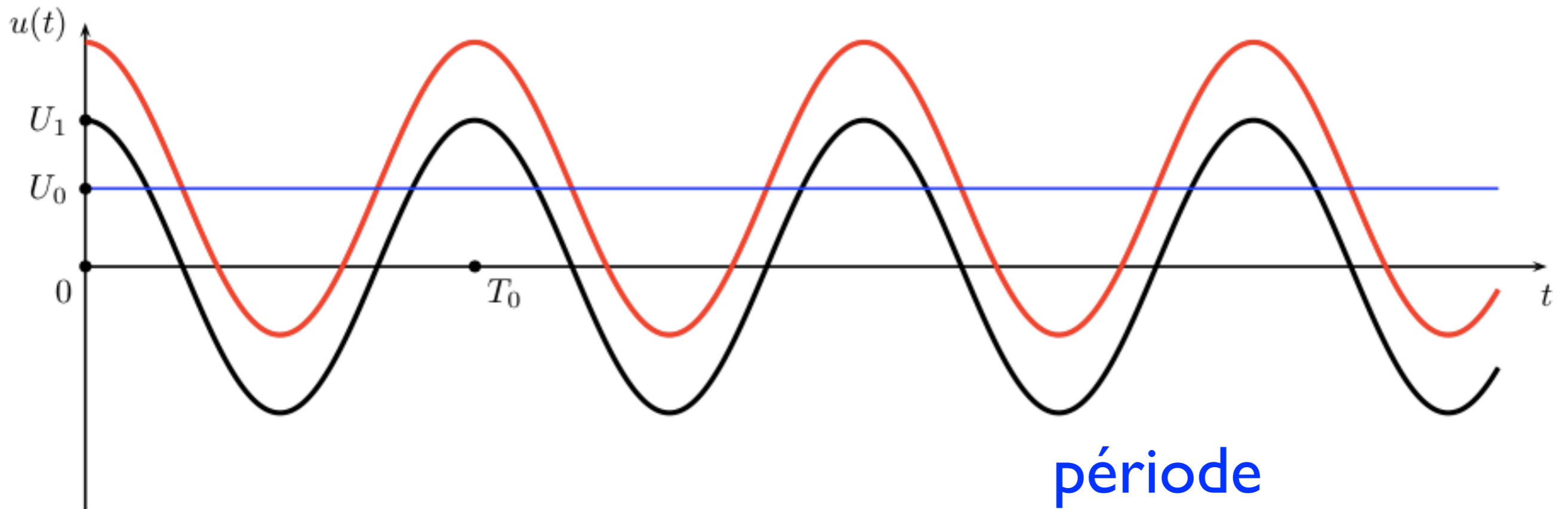
Postérité

- Célèbre passage d'une lettre de Jacobi à Legendre, 1881 :
- « Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était **l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels** ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est **l'honneur de l'esprit humain**, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. »
- Indiscutablement utilité publique et explication de nombreux phénomènes naturels, mais également résolution de « questions de nombres ».

SERIES DE FOURIER

Grandeurs sinusoïdales

Exemple classique : tension sinusoïdale



$$U_1 \cos(\omega_0 t)$$



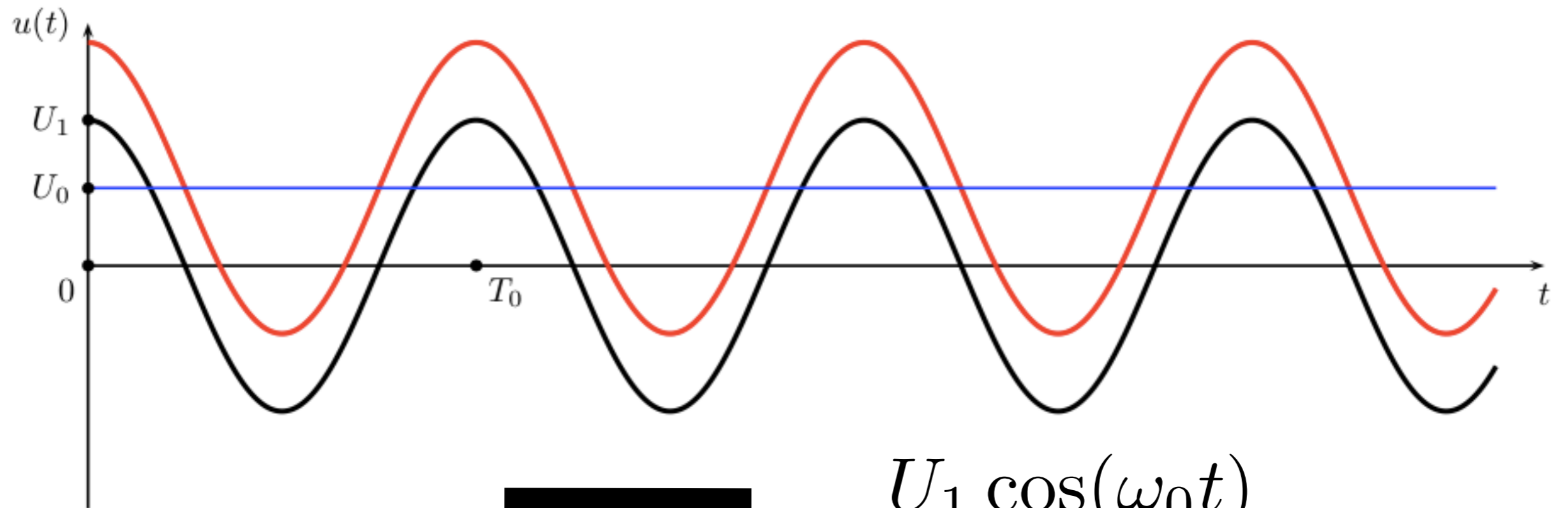
$$U_0 + U_1 \cos(\omega_0 t)$$

période

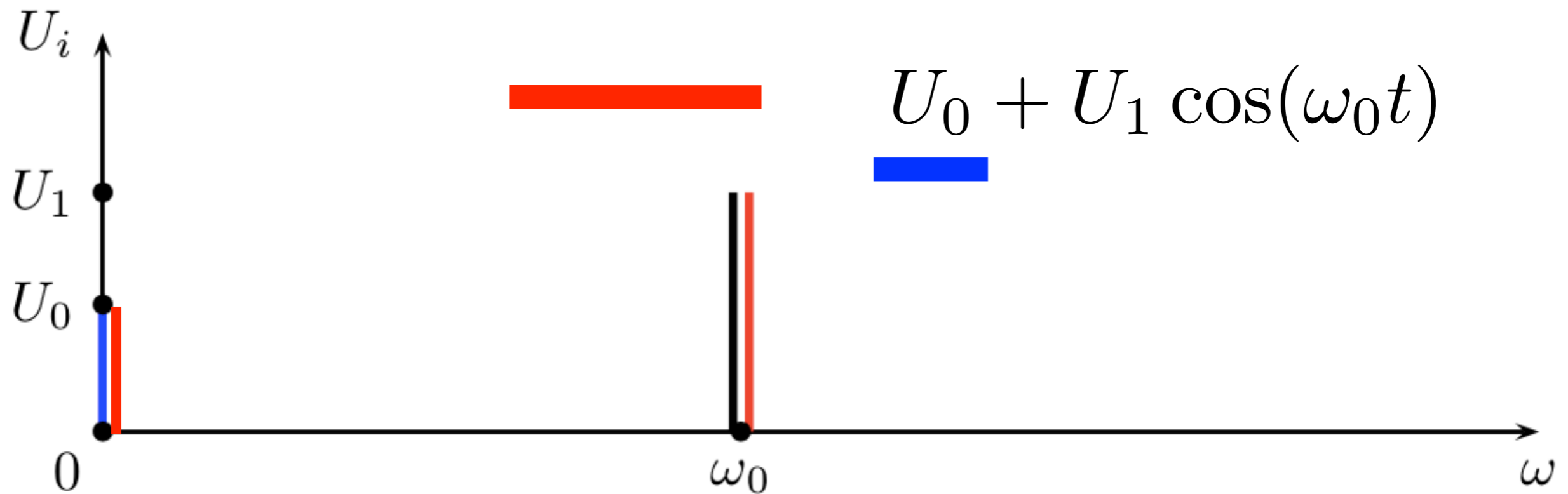
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

fréquence

Notion de spectre



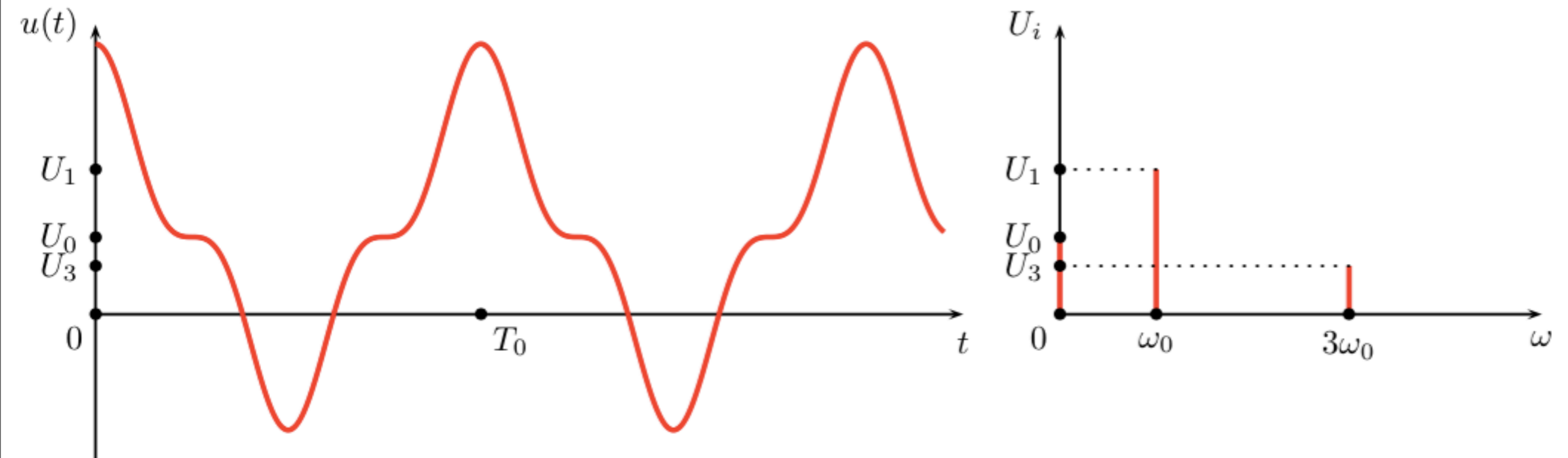
█ $U_1 \cos(\omega_0 t)$



█ $U_0 + U_1 \cos(\omega_0 t)$

Un exemple plus complexe

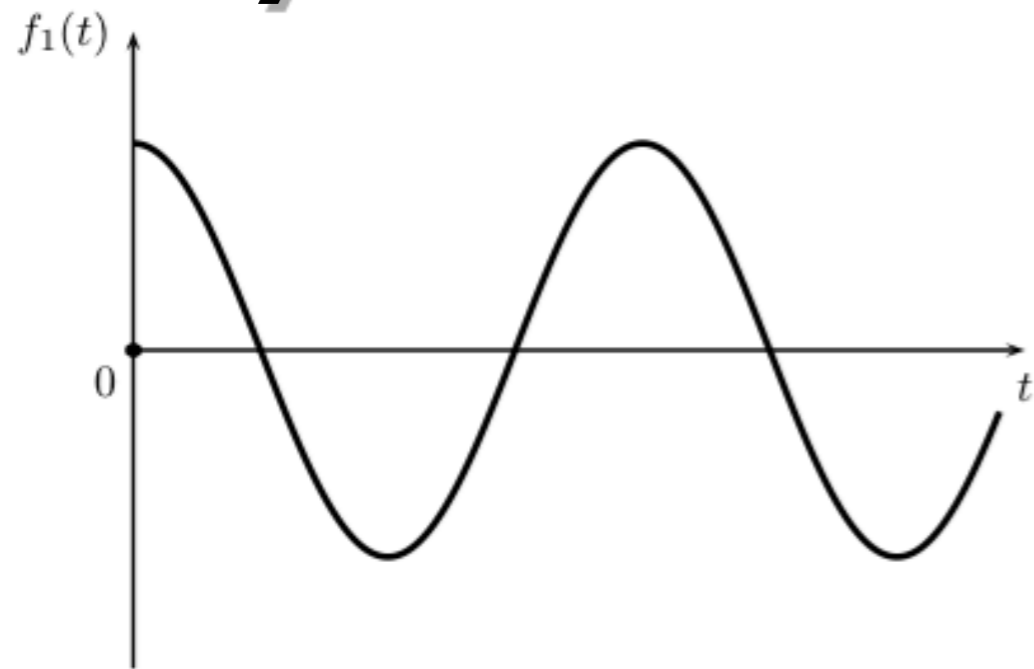
$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(\omega_0 t) + U_3 \cos(3\omega_0 t)$$



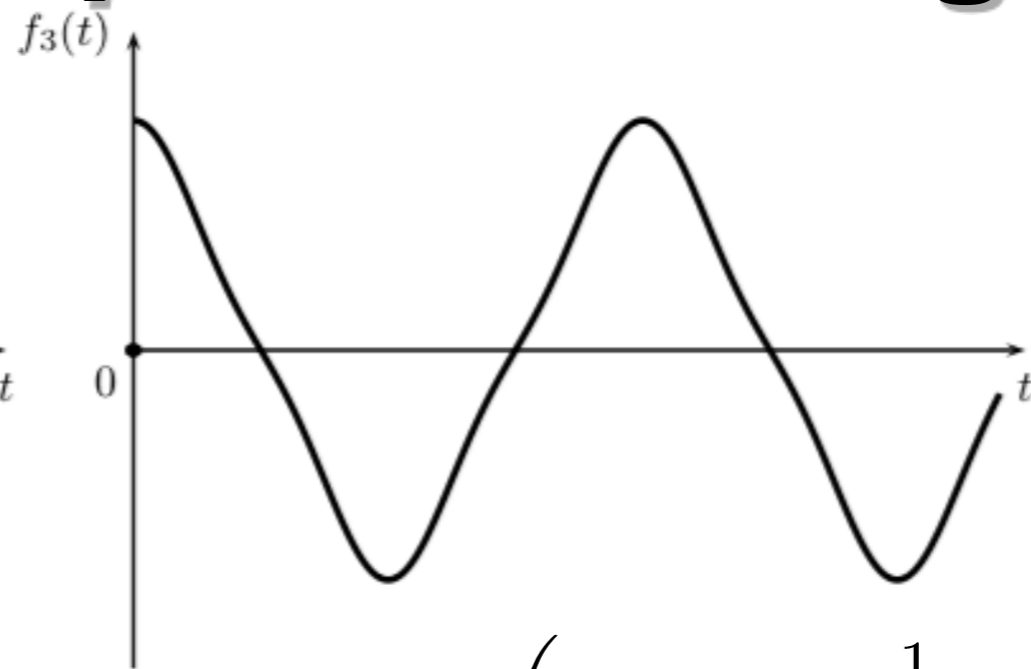
Représentation
temporelle

Représentation
fréquentielle

Synthèse de la fonction triangle

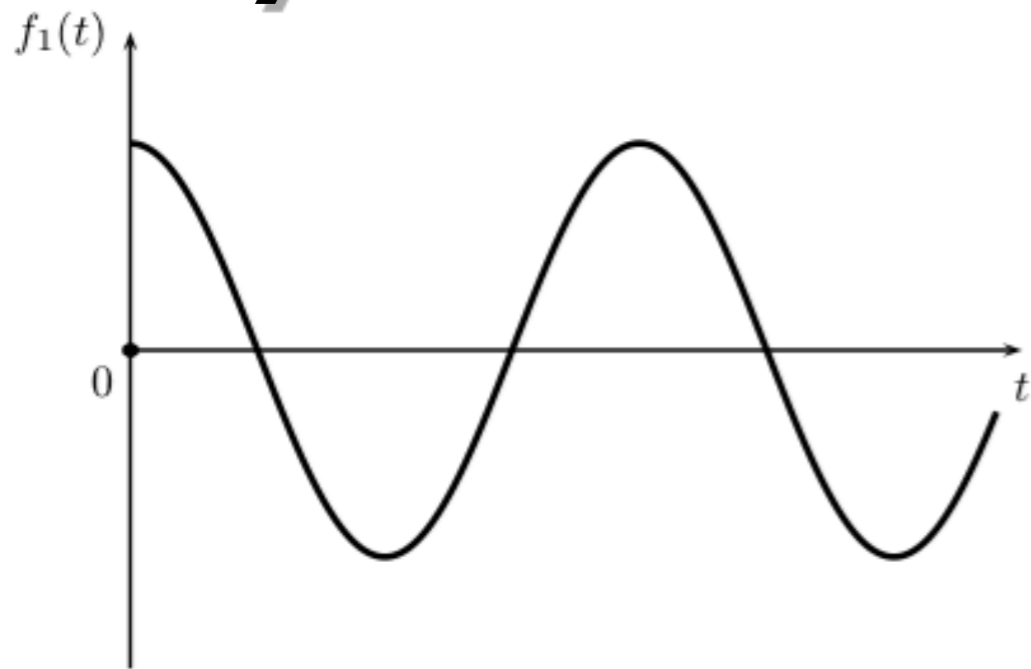


$$f_1(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

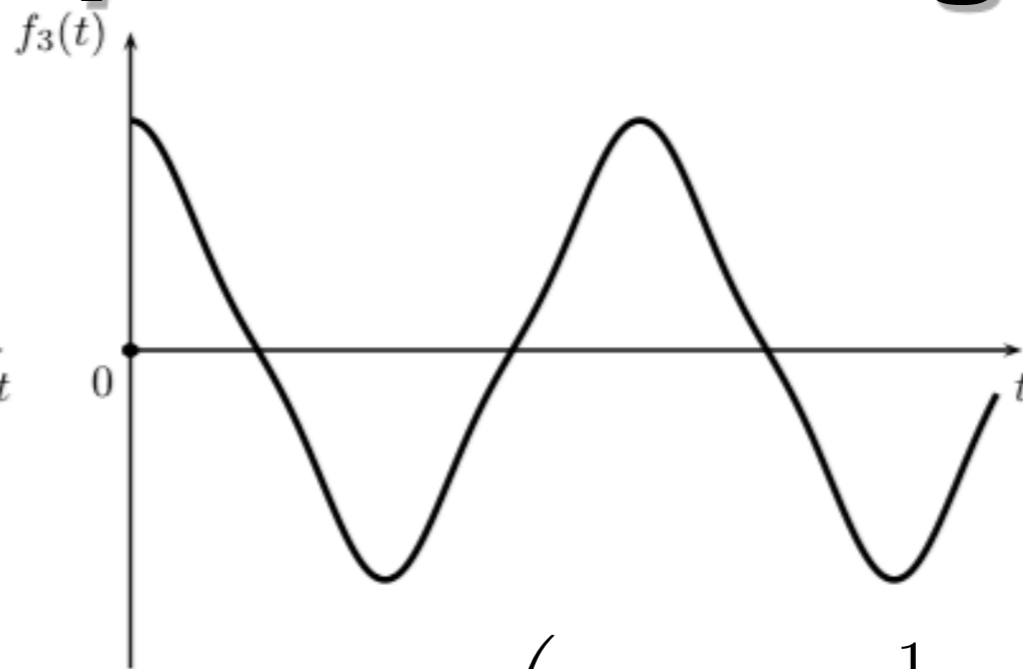


$$f_3(t) = F_0 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0 t) \right)$$

Synthèse de la fonction triangle



$$f_1(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

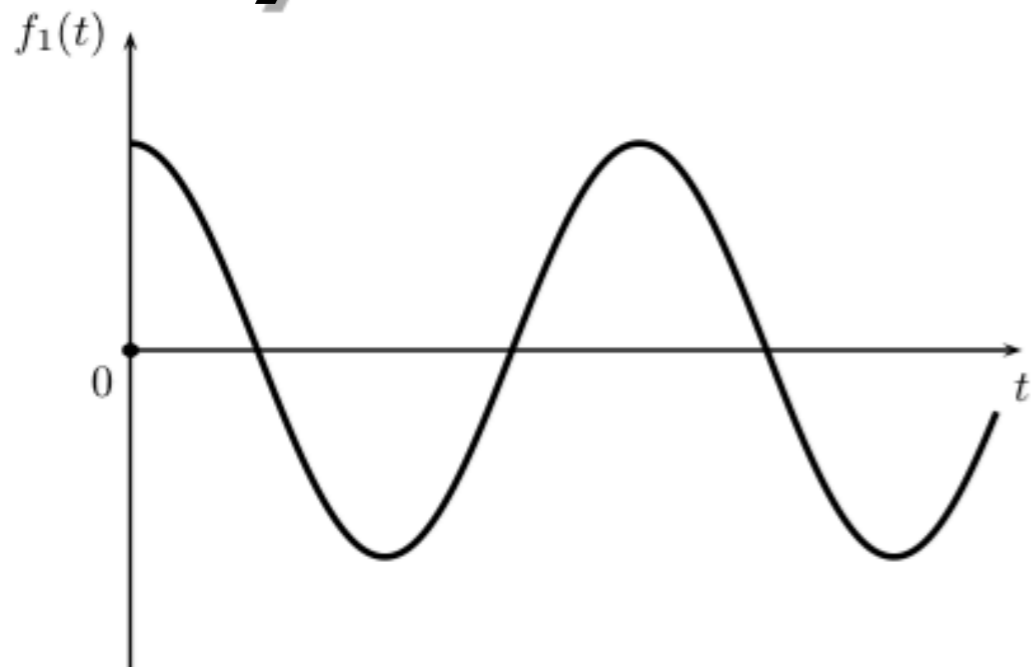


$$f_3(t) = F_0 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0 t) \right)$$

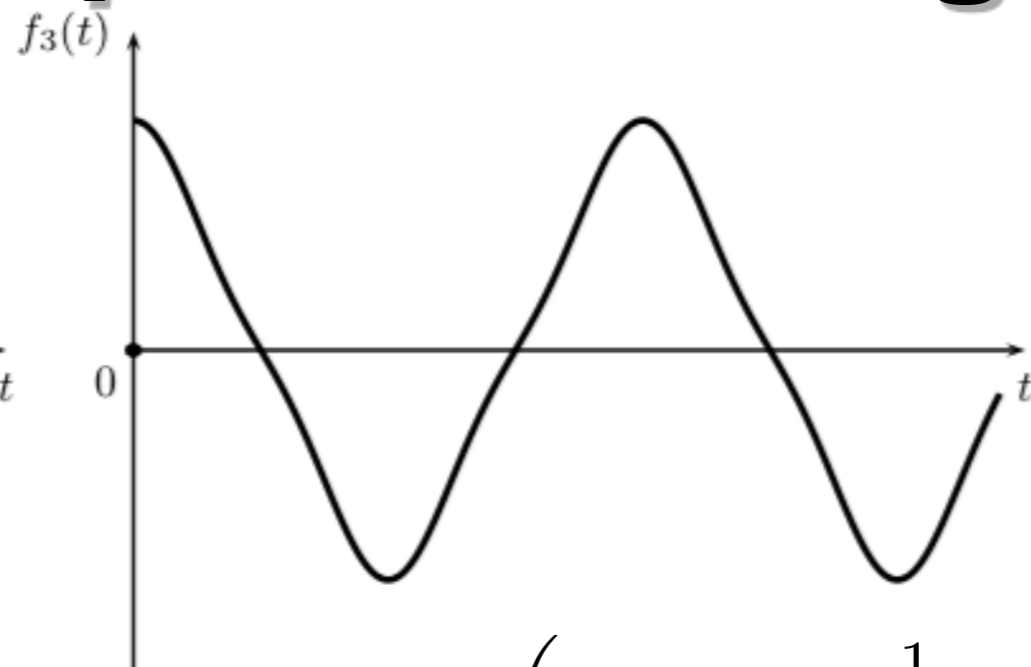
terme de pulsation
 ω_0 :
fondamental

Composantes sinusoidales
de pulsation multiple de
 ω_0 :
harmoniques

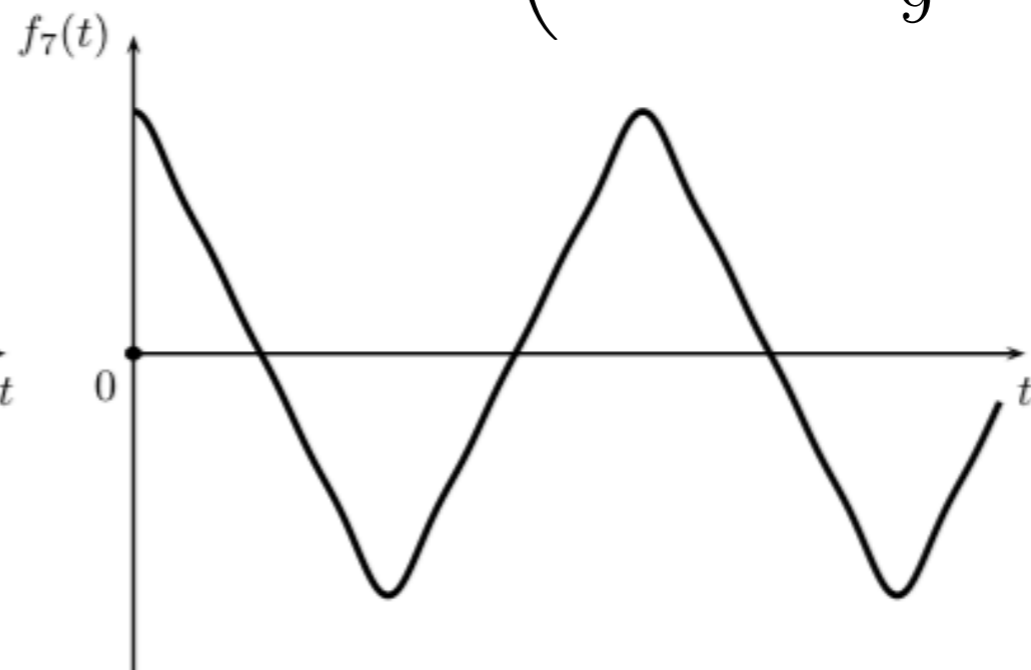
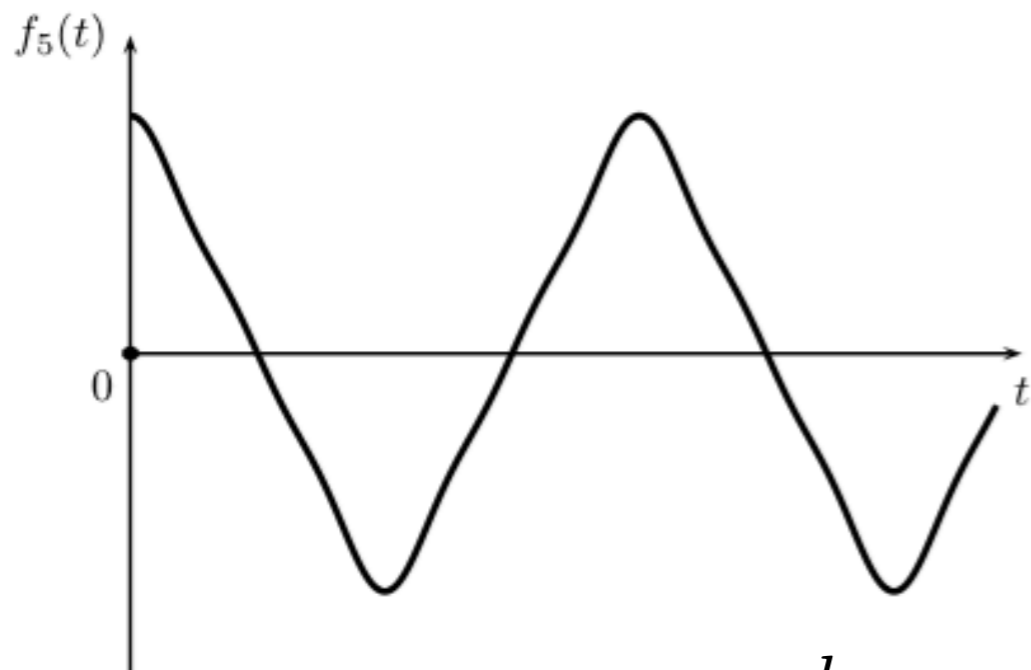
Synthèse de la fonction triangle



$$f_1(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

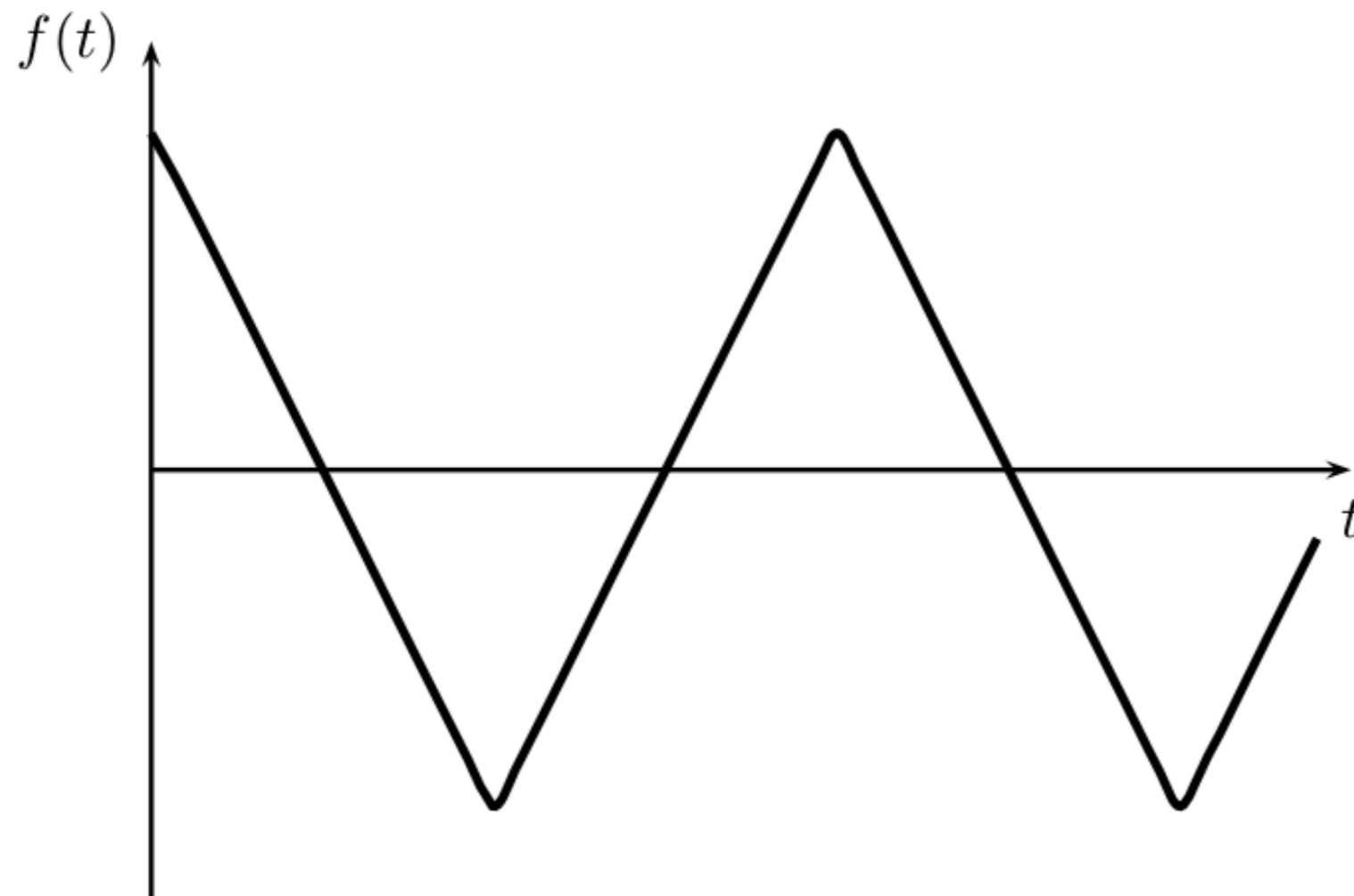


$$f_3(t) = F_0 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0 t) \right)$$



$$f_{2n+1}(t) = F_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t)$$

Synthèse de la fonction triangle



- 10 termes : **très bonne synthèse !** Indistinguishable à l'oeil nu de la fonction triangle.
- En effet, les amplitudes des harmoniques décroissent en $1/n^2$

Généralisation ?

- Pour toute fonction périodique :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t]$$



- Somme infinie, ou encore « série », en l'occurrence série de Fourier.
- Question mathématique de **convergence de la série pas évidente**. Dépend de la régularité de f .

Et en pratique, comment choisir les coefficients ?

- On a :

$$\langle \cos(n\omega_0 t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \sin(n\omega_0 t) \rangle = 0$$

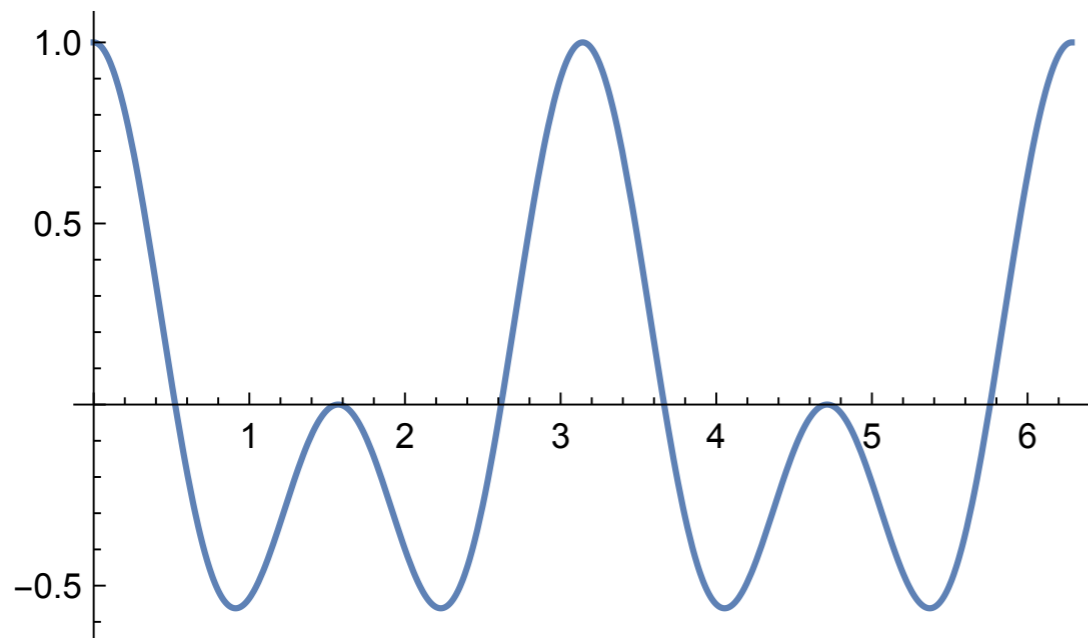
- Donc, si f égale sa série de Fourier :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) dt = \frac{a_0}{2}$$

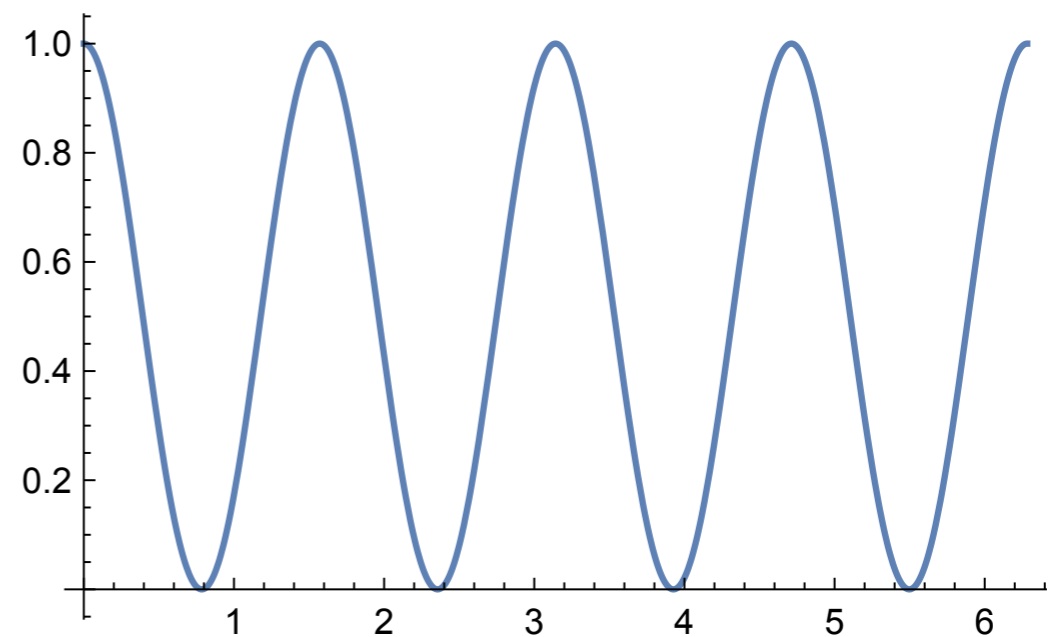
Et en pratique, comment choisir les coefficients ?

- De plus :

$$\langle \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) \rangle = \begin{cases} = 0 & \text{si } n \neq m \\ = \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\cos(x) \cos(3x)$$



$$\cos^2(2x)$$

Et en pratique, comment choisir les coefficients ?

- De plus :

$$\langle \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) \rangle = \begin{cases} = 0 & \text{si } n \neq m \\ = \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$



$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

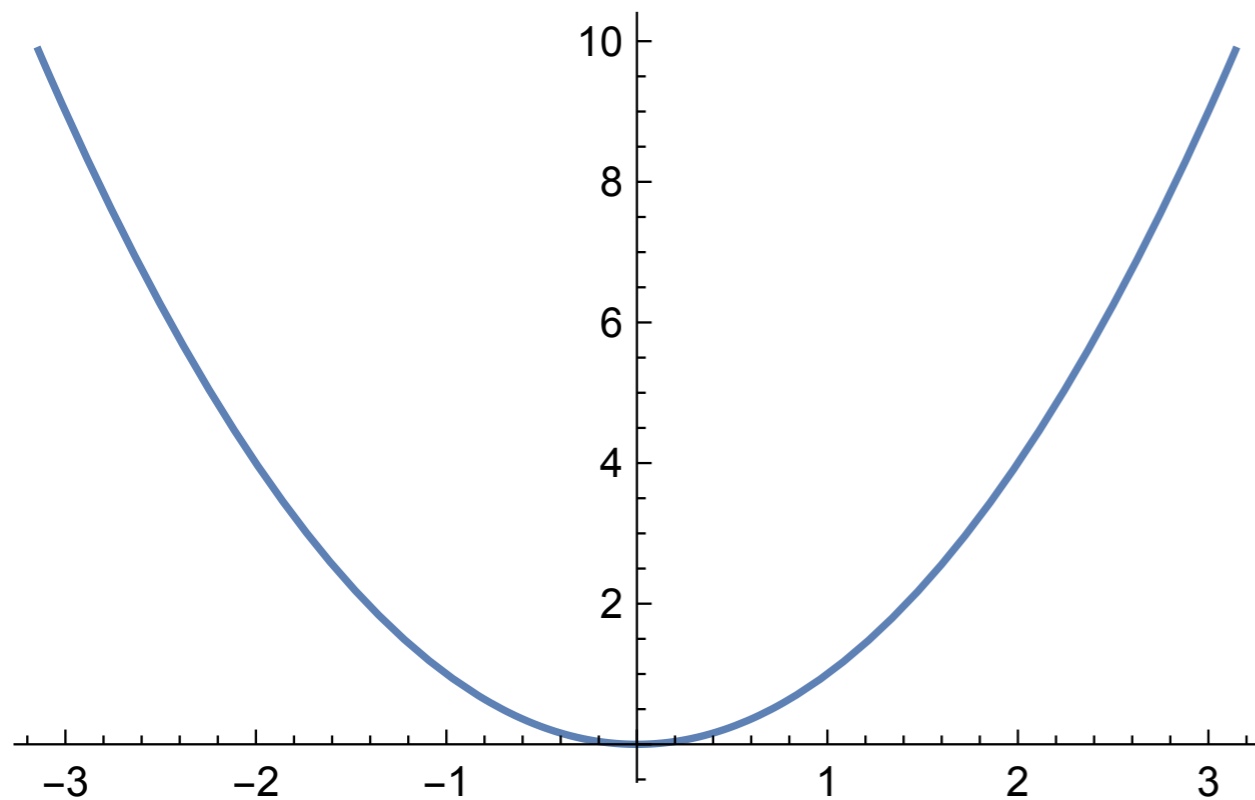
Historique

- Précurseurs : d'Alembert, Euler, Bernoulli, Lagrange (cordes vibrantes)
- Fourier (1800-1830) : pas rigoureux.
Aucune hypothèse.
- 1829, Dirichlet : premier énoncé correct pour des fonctions suffisamment régulières : la série de Fourier converge bien vers sa fonction !

Application : deux jolies formules

Fonction f 2π périodique

$$f(x) = x^2 \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi$$



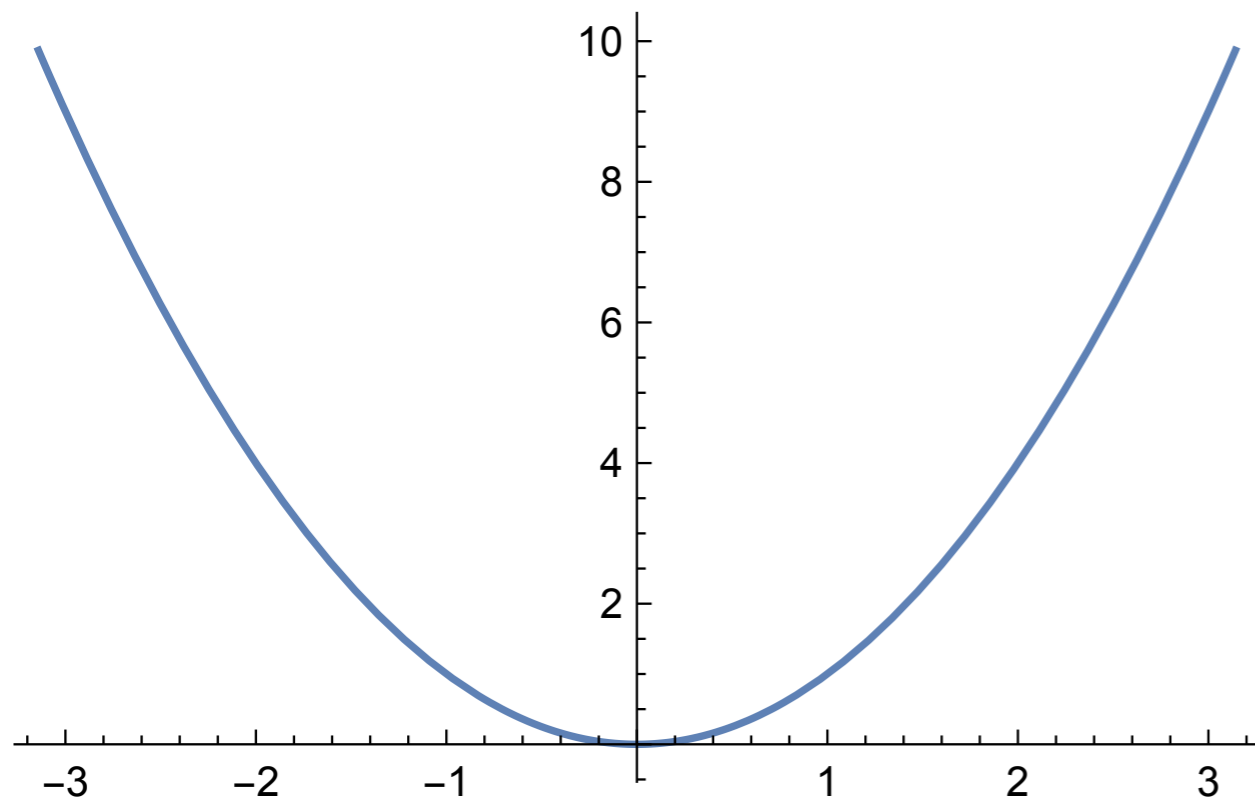
Application : deux jolies formules

Fonction f 2π périodique



Décomposition
de Fourier :

$$f(x) = x^2 \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi$$



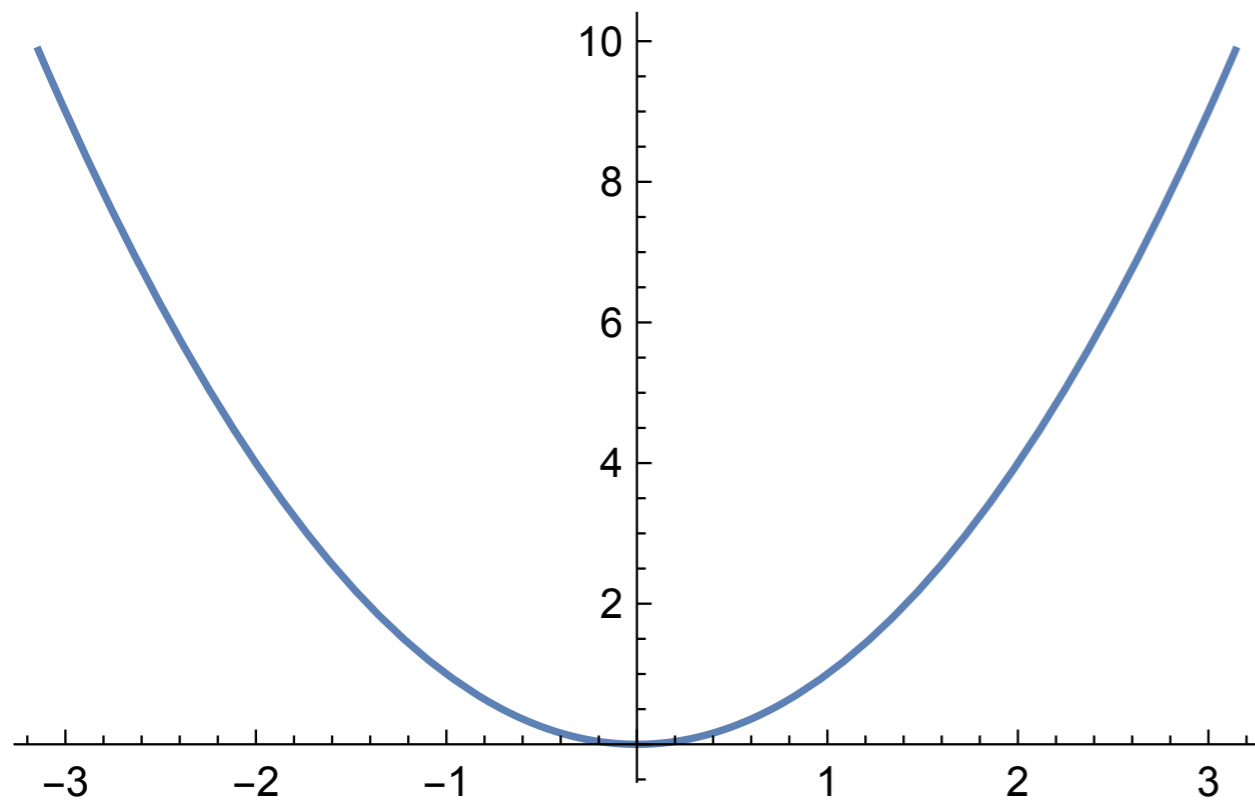
Application : deux jolies formules

Fonction f 2π périodique



Décomposition
de Fourier :

$$f(x) = x^2 \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi$$



$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

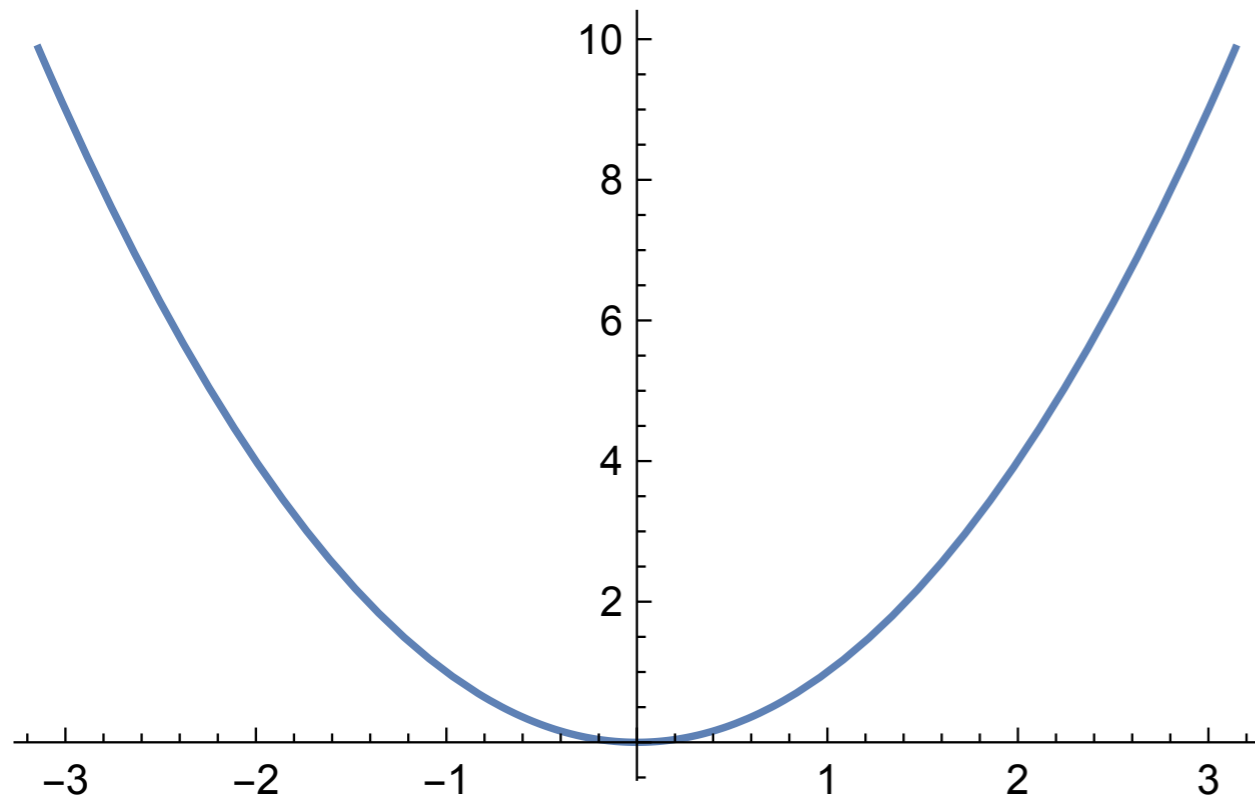
Application : deux jolies formules

Fonction f 2π périodique



Décomposition
de Fourier :

$$f(x) = x^2 \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi$$



$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

$$x = \pi$$



$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

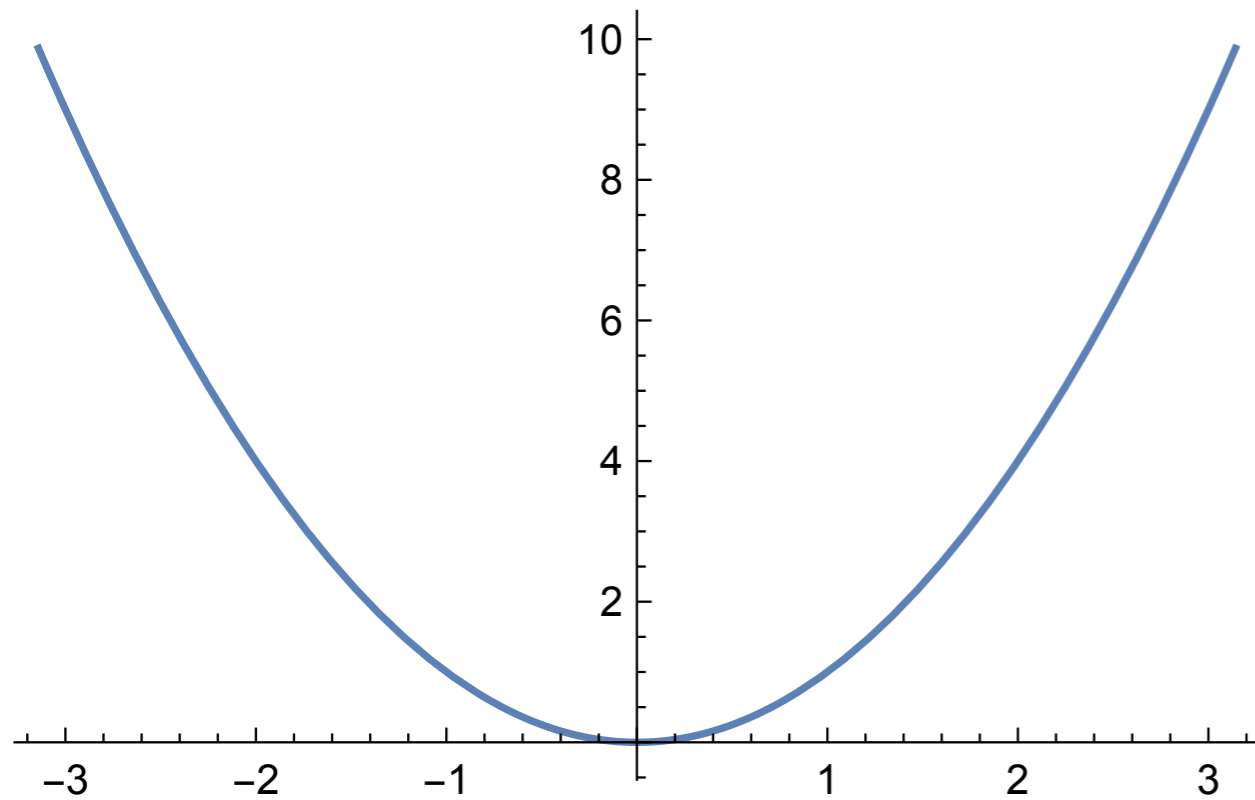
Application : deux jolies formules

Fonction f 2π périodique



Décomposition
de Fourier :

$$f(x) = x^2 \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi$$



$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

$$x = \pi$$



$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$x = 0$$



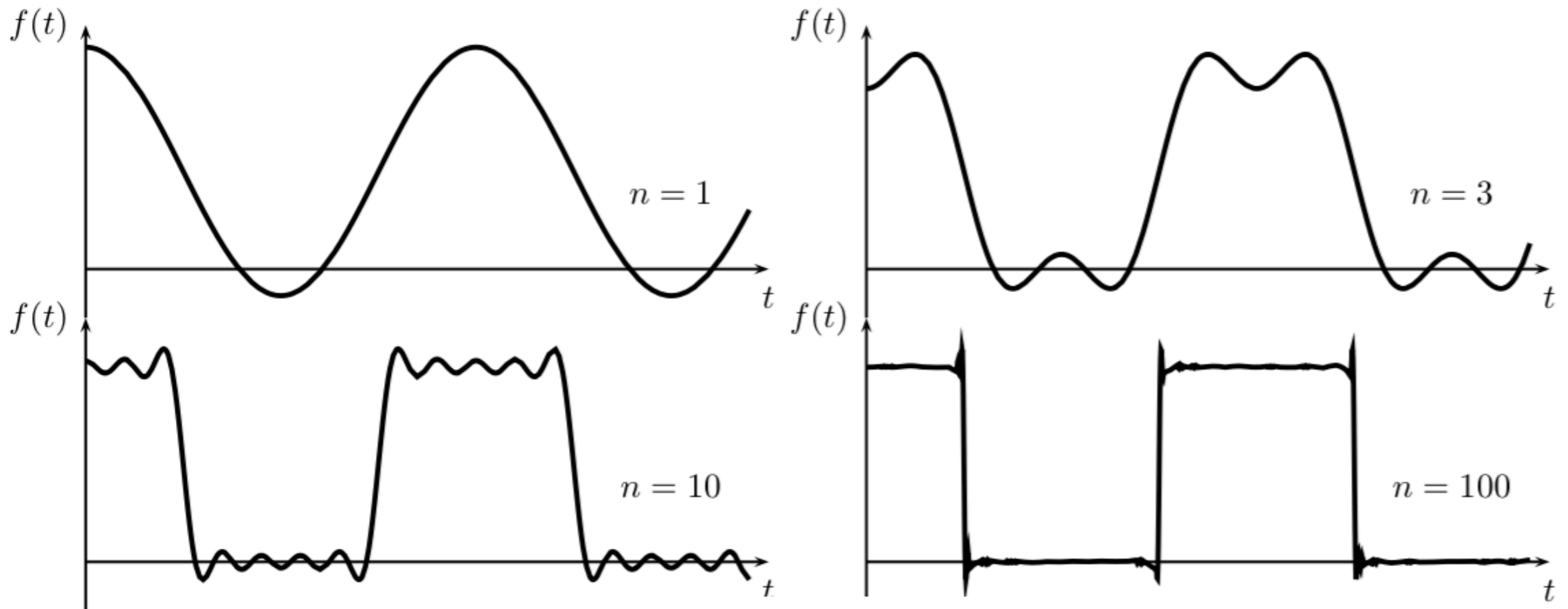
$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Bizarrie mathématique

- 1848, phénomène de Gibbs

Phénomène de Gibbs

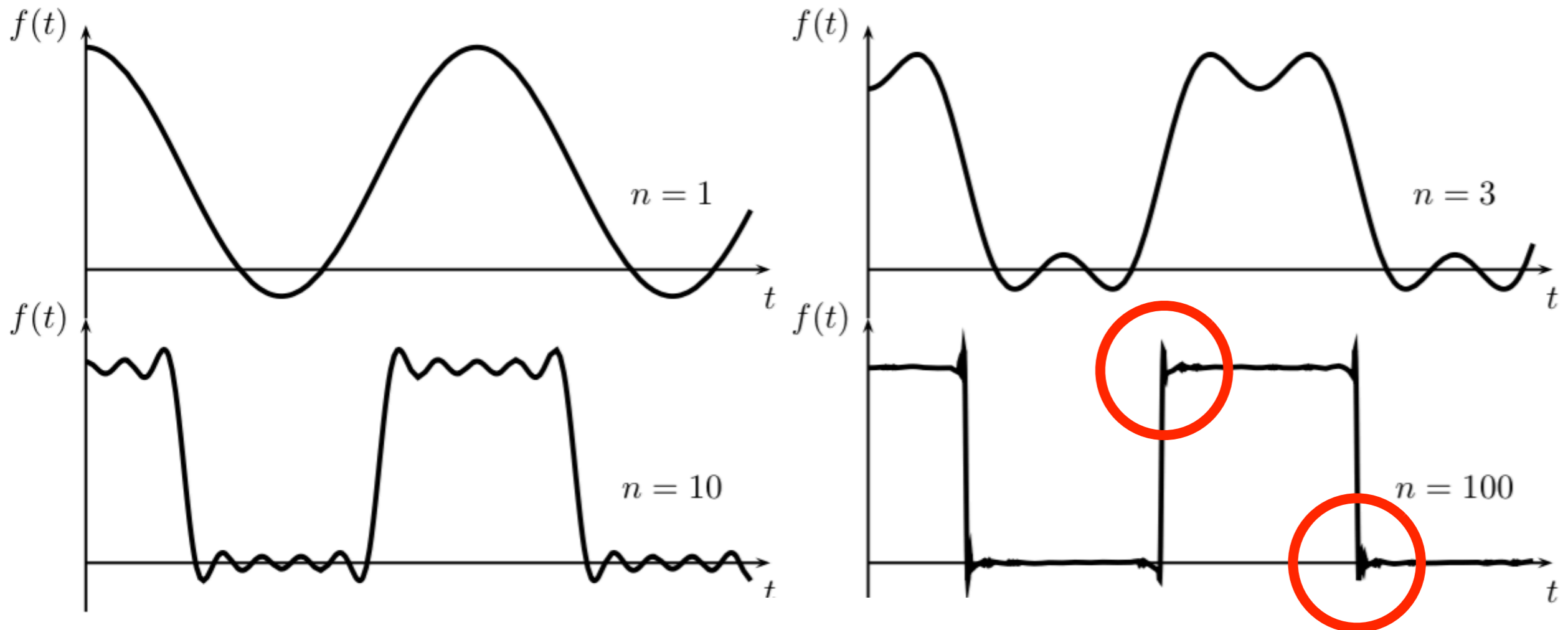
- Sommes partielles de la série de Fourier de la fonction créneau :



$$f_n(t) = F_0 \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k \frac{\pi}{2}} \cos(k \omega_0 t) \right)$$

Phénomène de Gibbs

- Sommes partielles de la série de Fourier de la fonction créneau :



- Effet de bord au voisinage des discontinuités

Bizarrie mathématique

- 1848, phénomène de Gibbs
- 1873, du Bois-Reymond : premier exemple de fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point.
- 1926, Kolmogorov : exemple de fonction intégrable dont la série de Fourier diverge partout.

Bizarrie mathématique

- 1848, phénomène de Gibbs
- 1873, du Bois-Reymond : premier exemple de fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point.
- 1926, Kolmogorov : exemple de fonction intégrable dont la série de Fourier diverge partout.

Dans la suite, on considère des fonctions suffisamment régulières, et en bon physicien, on ne justifiera presque aucun aspect mathématique.

Notation complexe

- **Écriture réelle :**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

Notation complexe

- Écriture réelle :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

- Écriture complexe équivalente :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t}$$

$$(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$$

avec

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ pour } n \leq 0$$

Notation complexe

- Ecriture réelle :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

- Ecriture complexe équivalente :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t} \quad (e^{ix} = \cos x + i \sin x)$$

avec

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ pour } n \leq 0$$

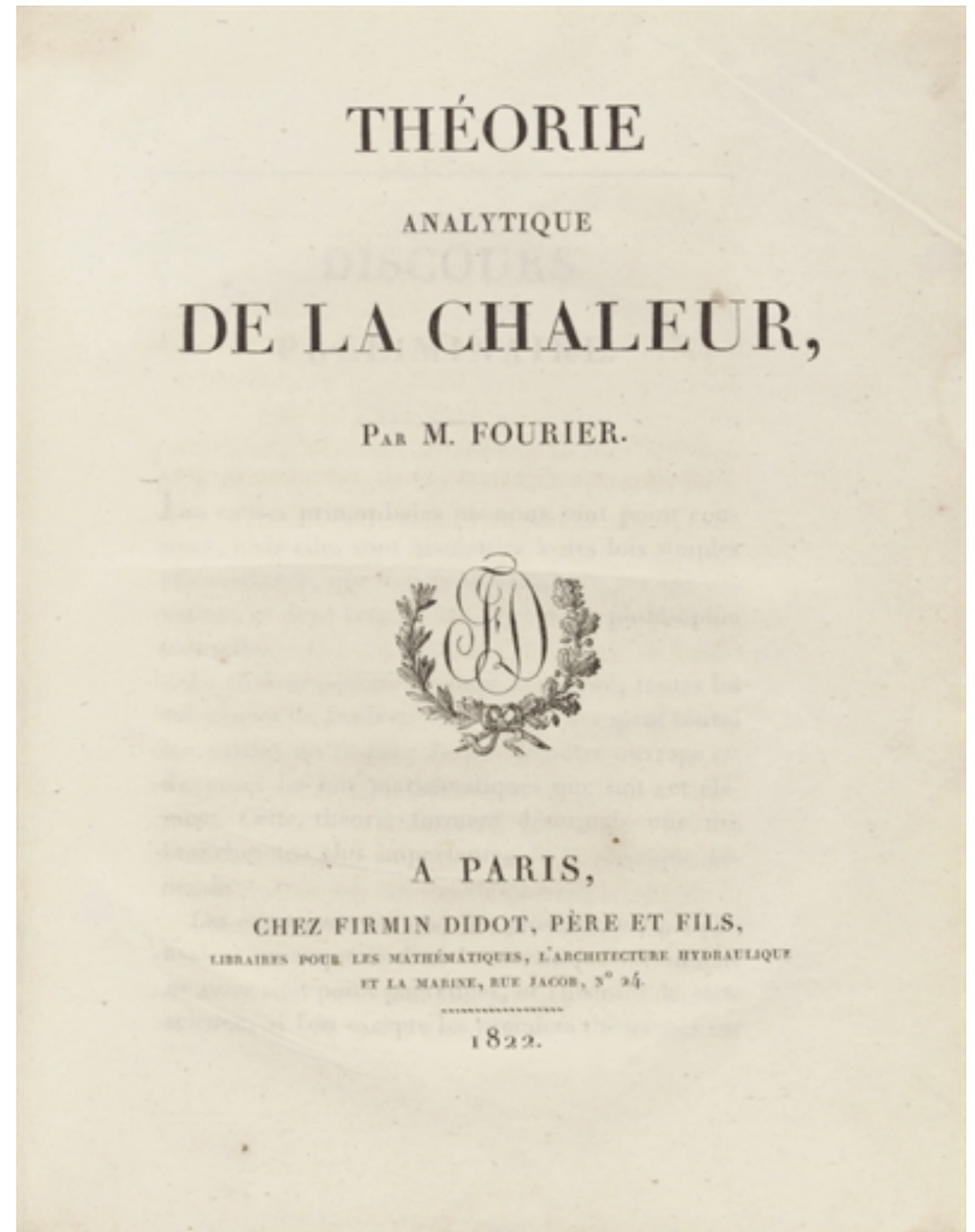
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\text{periode}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

DIFFUSION
DE LA
CHALEUR

Premier « exemple »

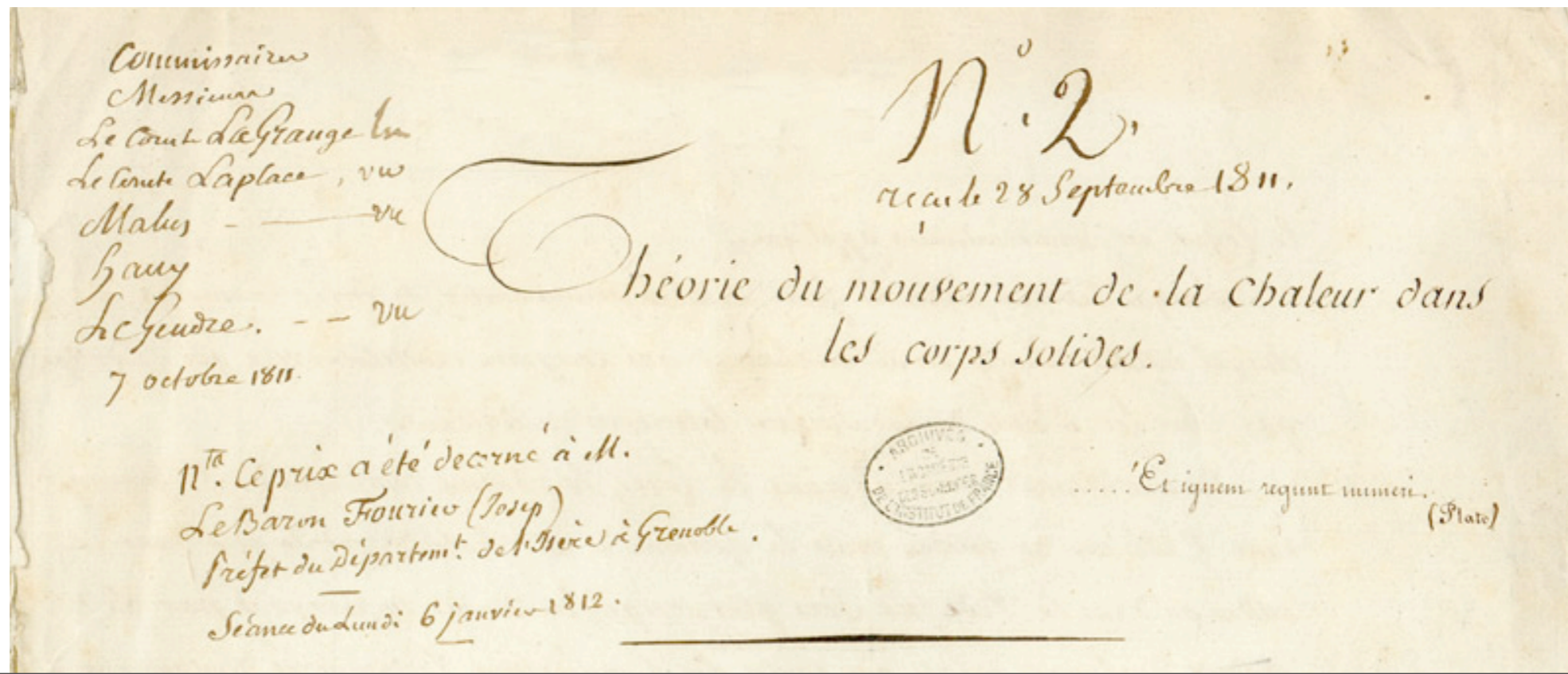


Joseph Fourier (1768-1830)



Premier « exemple »

- 1807 : Fourier écrit l'équation de la chaleur
- 1808 : mémoire accepté par l'Académie des Sciences, malgré les **nombreuses controverses et oppositions**, par Laplace, Poisson, Lagrange etc.



Premier « exemple »

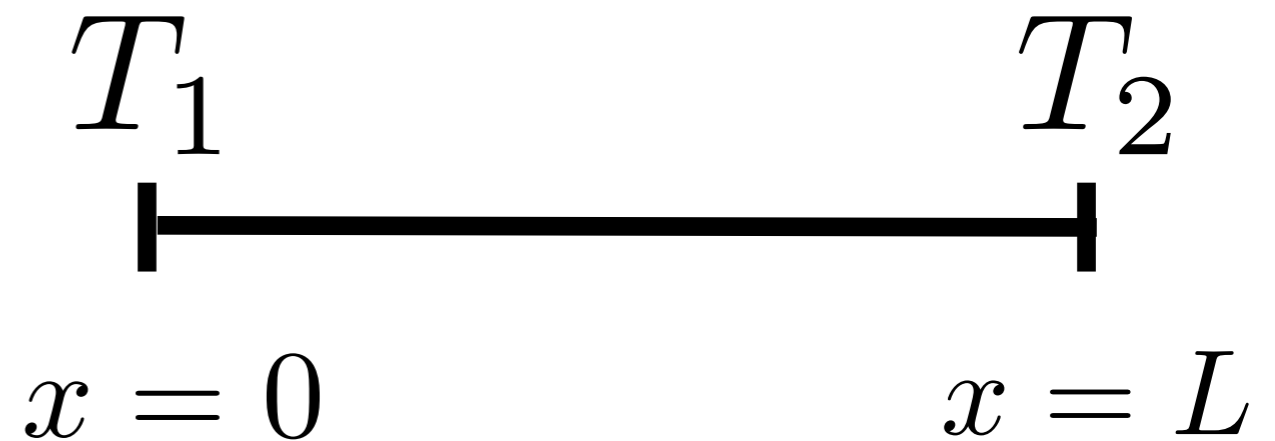
- 1807 : Fourier écrit **l'équation de la chaleur**
- 1808 : mémoire accepté par l'Académie des Sciences, malgré les **nombreuses controverses et oppositions**, par Laplace, Poisson, Lagrange etc.
- 1822 : publication du « **Traité analytique de la chaleur** », version remaniée et augmentée du mémoire de Fourier. Lecture toujours intéressante actuellement.

Le problème



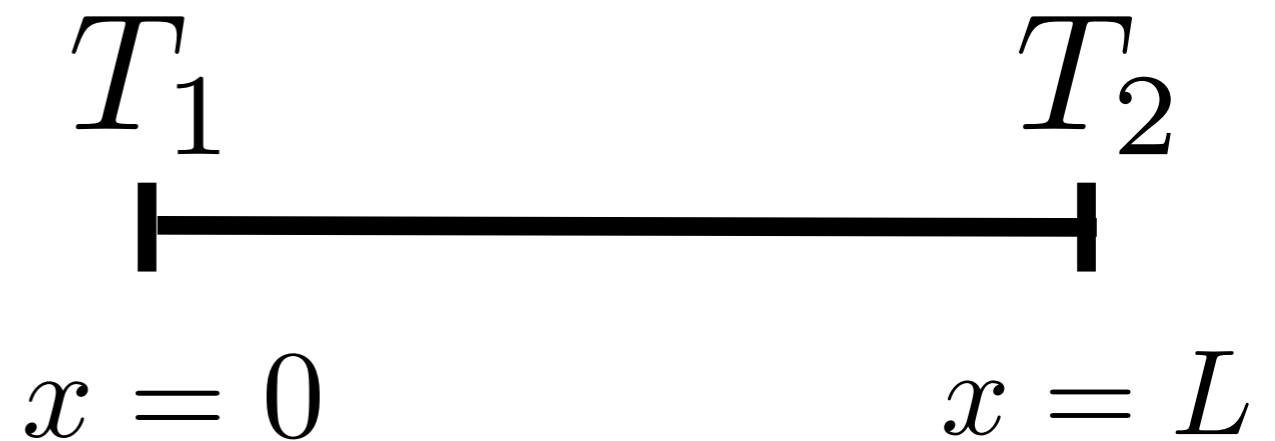
Le problème

Evolution de la température d'une tige de fer, soumise à une température constante à ses deux extrémités.



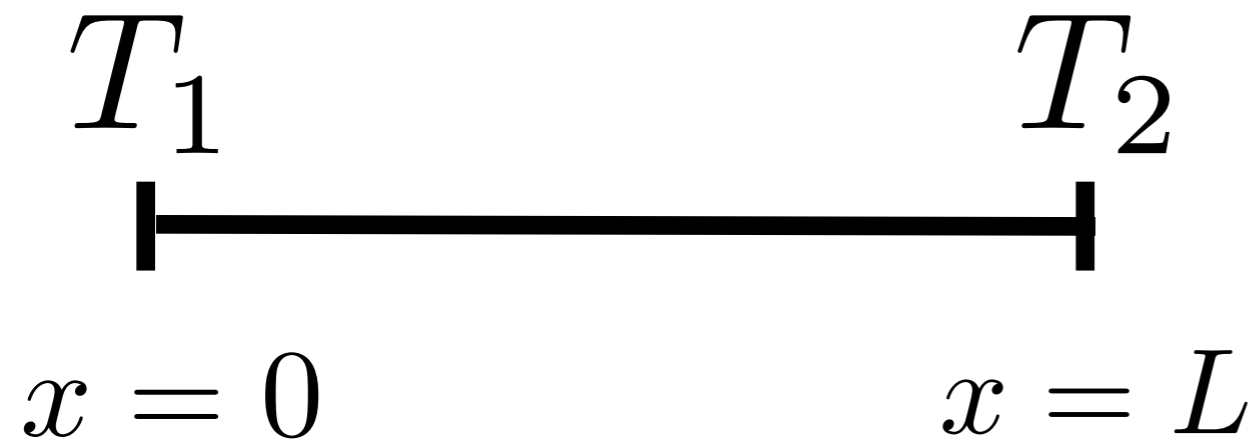
Le problème

Evolution de la température d'une tige de fer, soumise à une température constante à ses deux extrémités.



$$T(x, t) ?$$

Le problème

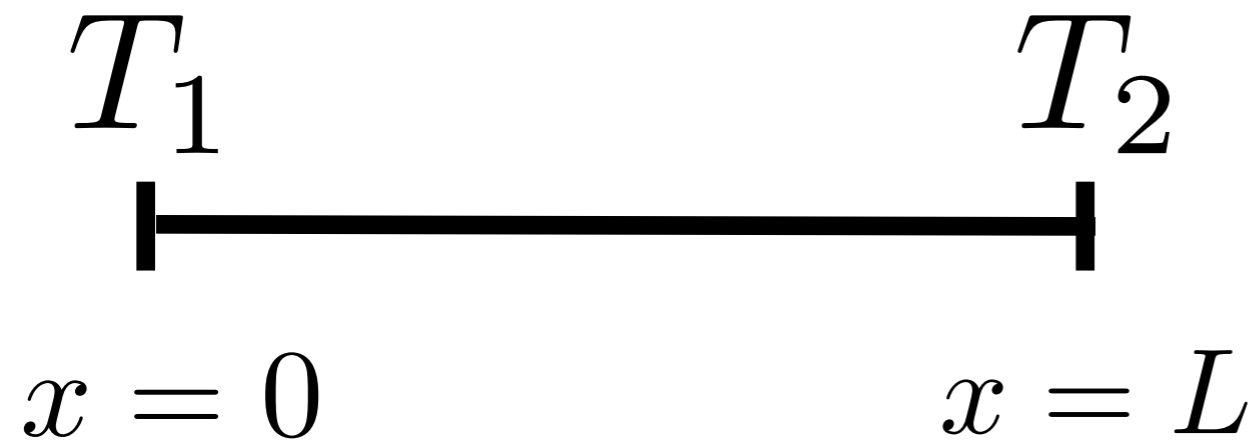


Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

« coefficient de diffusivité thermique »
(dépend du matériau)

Le problème



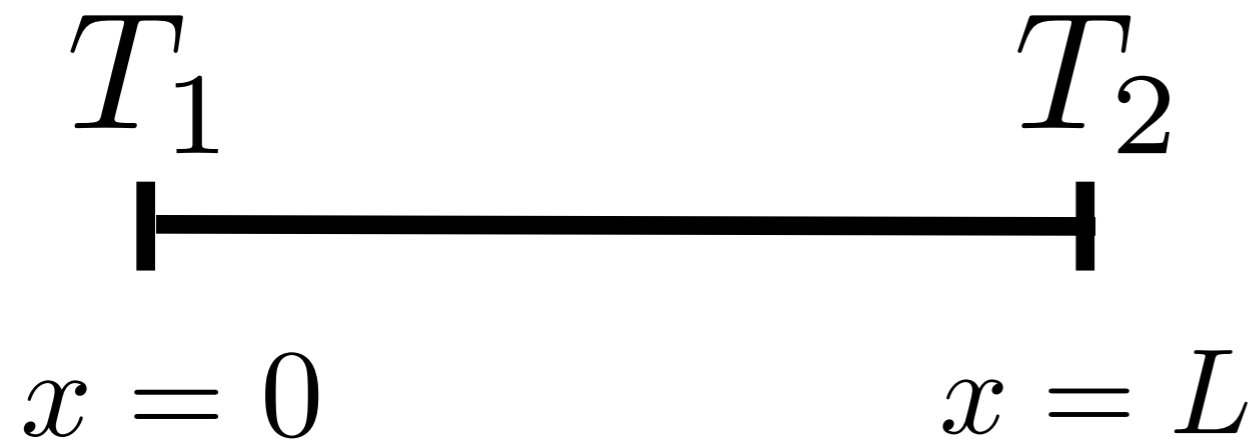
Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

Conditions aux limites

$$T(0, t) = T_1 \quad \text{et} \quad T(L, t) = T_2$$

Le problème



Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

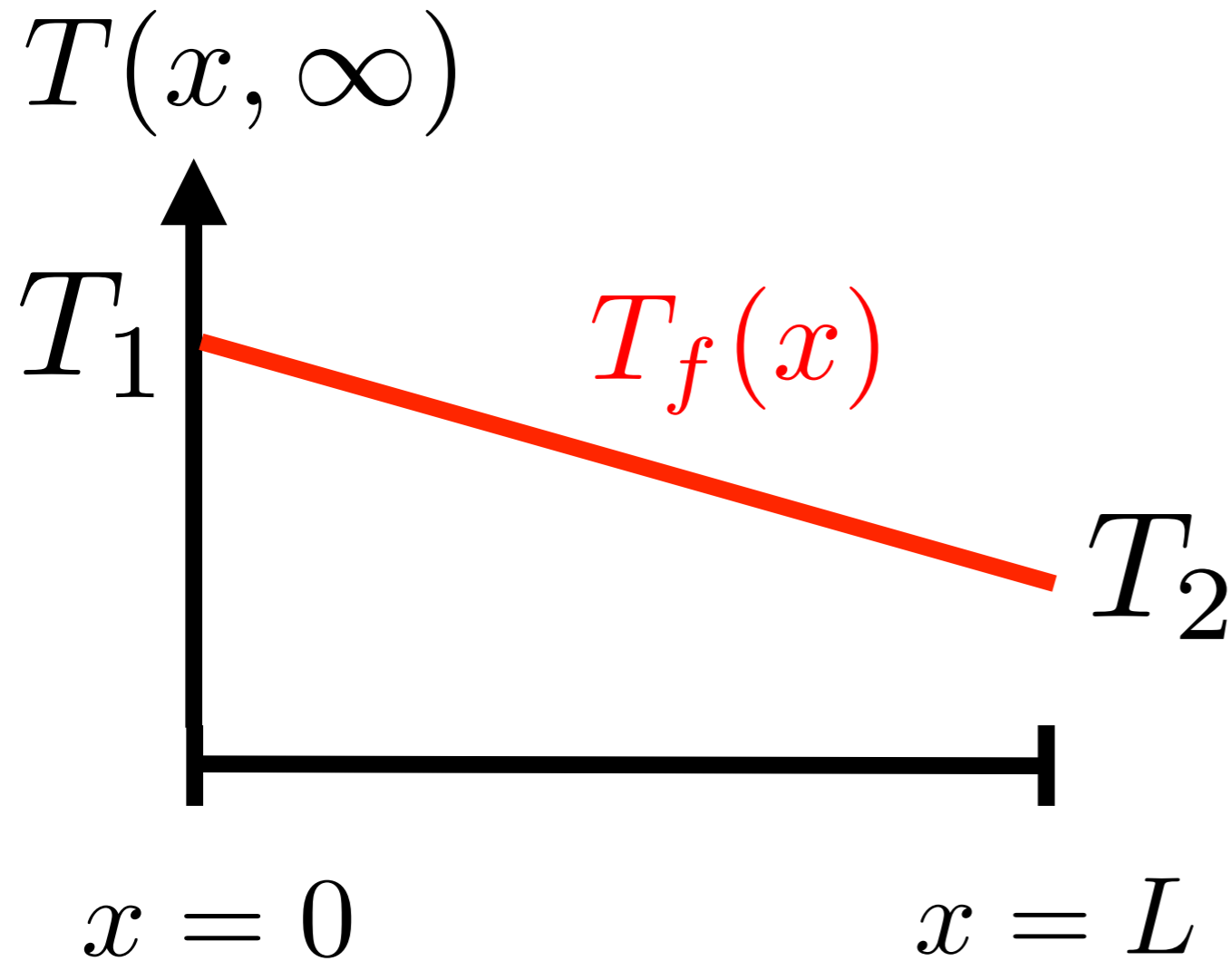
Conditions aux limites

$$T(0, t) = T_1 \quad \text{et} \quad T(L, t) = T_2$$

Condition initiale

$$T(x, 0) = T_0(x)$$

La solution à temps long



- Solution intuitive
- Vérifie l'équation de la chaleur, et les conditions aux limites

Résolution

- La différence $u = T - T_f$ vérifie :

Equation de la chaleur
$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Conditions aux limites
$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L, t) = 0$$

Condition initiale
$$u(x, 0) = T_0(x) - T_f(x) \equiv f(x)$$


Résolution

- La différence $u = T - T_f$ vérifie :

Equation de la chaleur $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$

Conditions aux limites $u(0, t) = 0$ et $u(L, t) = 0$

Condition initiale $u(x, 0) = T_0(x) - T_f(x) \equiv f(x)$



- A chaque instant, u peut être décomposée en série de Fourier !

Résolution

- Série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(2\pi nx/L)$$

Résolution

- Série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(2\pi n x / L)$$



injectée dans l'équation de la chaleur

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin(2\pi n x / L) = - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) D (2\pi n / L)^2 \sin(2\pi n x / L)$$

Résolution

- Série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(2\pi n x / L)$$



injectée dans l'équation de la chaleur

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin(2\pi n x / L) = - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) D (2\pi n / L)^2 \sin(2\pi n x / L)$$



Identification : $u'_n(t) = -D (2\pi n / L)^2 u_n(t)$

Résolution

- Série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(2\pi n x / L)$$



injectée dans l'équation de la chaleur

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin(2\pi n x / L) = - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) D (2\pi n / L)^2 \sin(2\pi n x / L)$$



Identification : $u'_n(t) = -D (2\pi n / L)^2 u_n(t)$

Résolution : $u_n(t) = u_n(0) e^{-D (2\pi n / L)^2 t}$

Résolution

- Série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(2\pi n x / L)$$



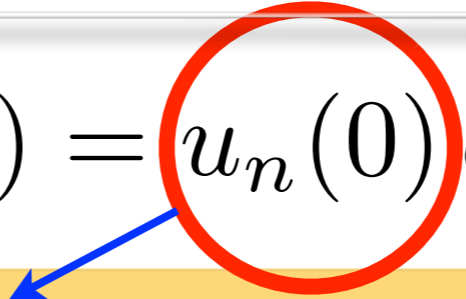
injectée dans l'équation de la chaleur

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin(2\pi n x / L) = - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) D(2\pi n / L)^2 \sin(2\pi n x / L)$$



Identification : $u'_n(t) = -D(2\pi n / L)^2 u_n(t)$

Résolution : $u_n(t) = u_n(0) e^{-D(2\pi n / L)^2 t}$



Rien d'autre que les coefficients de Fourier
de la condition initiale !

Morale

Phénomène complexe en espace réel : superposition
de phénomènes simples en espace de Fourier

Morale

Phénomène complexe en espace réel : superposition de phénomènes simples en espace de Fourier

- Ecart initial à l'état d'équilibre : $u(x, 0) = T(x, 0) - T_f(x)$

Morale

Phénomène complexe en espace réel : superposition de phénomènes simples en espace de Fourier

- Ecart initial à l'état d'équilibre : $u(x, 0) = T(x, 0) - T_f(x)$



Passage en
Fourier

- Simple décroissance exponentielle de l'amplitude de chaque harmonique :

$$u_n(t) \propto e^{-\#n^2 t}$$

Morale

Phénomène complexe en espace réel : superposition de phénomènes simples en espace de Fourier

- Ecart initial à l'état d'équilibre : $u(x, 0) = T(x, 0) - T_f(x)$



Passage en Fourier

- Simple décroissance exponentielle de l'amplitude de chaque harmonique :

$$u_n(t) \propto e^{-\#n^2 t}$$

- Les composantes de haute fréquence sont effacées plus rapidement. **Le genre d'intuition que permet le passage en Fourier.**

TRANSFORMÉE
DE FOURIER ET
DIFFRACTION

Du discret au continu

Intuition géniale de Fourier : décomposition similaire
pour des fonctions quelconques, non périodiques !

Du discret au continu

Intuition géniale de Fourier : décomposition similaire
pour des fonctions quelconques, non périodiques !

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\text{periode}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Série de Fourier

Du discret au continu

Intuition géniale de Fourier : décomposition similaire
pour des fonctions quelconques, non périodiques !

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t}$$



$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\text{periode}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Série de Fourier

Du discret au continu

Intuition géniale de Fourier : décomposition similaire
pour des fonctions quelconques, non périodiques !

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t}$$



$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Somme continue sur les
fréquences : intégrale

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\text{periode}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Série de Fourier

Du discret au continu

Intuition géniale de Fourier : décomposition similaire
pour des fonctions quelconques, non périodiques !

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

conventions ...

Somme continue sur les
fréquences : intégrale

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\text{periode}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Série de Fourier

Du discret au continu

Intuition géniale de Fourier : décomposition similaire
pour des fonctions quelconques, non périodiques !

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

conventions ...

Somme continue sur les
fréquences : intégrale

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\text{periode}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Série de Fourier

Du discret au continu

Intuition géniale de Fourier : décomposition similaire
pour des fonctions quelconques, non périodiques !

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega_n t}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

conventions ...

Somme continue sur les
fréquences : intégrale

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\text{periode}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Série de Fourier

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier

- **Temps** (signal électrique, acoustique ...)

Temps t et fréquence $\omega = 2\pi/T$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

- **Espace** (équations de la chaleur, équations d'onde ...)

Position x et fréquence spatiale $k = 2\pi/\lambda$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$$

Deux propriétés utiles de la TF

- Égalité de l'énergie dans le domaine réel et dans le domaine fréquentiel (égalité de Parseval)

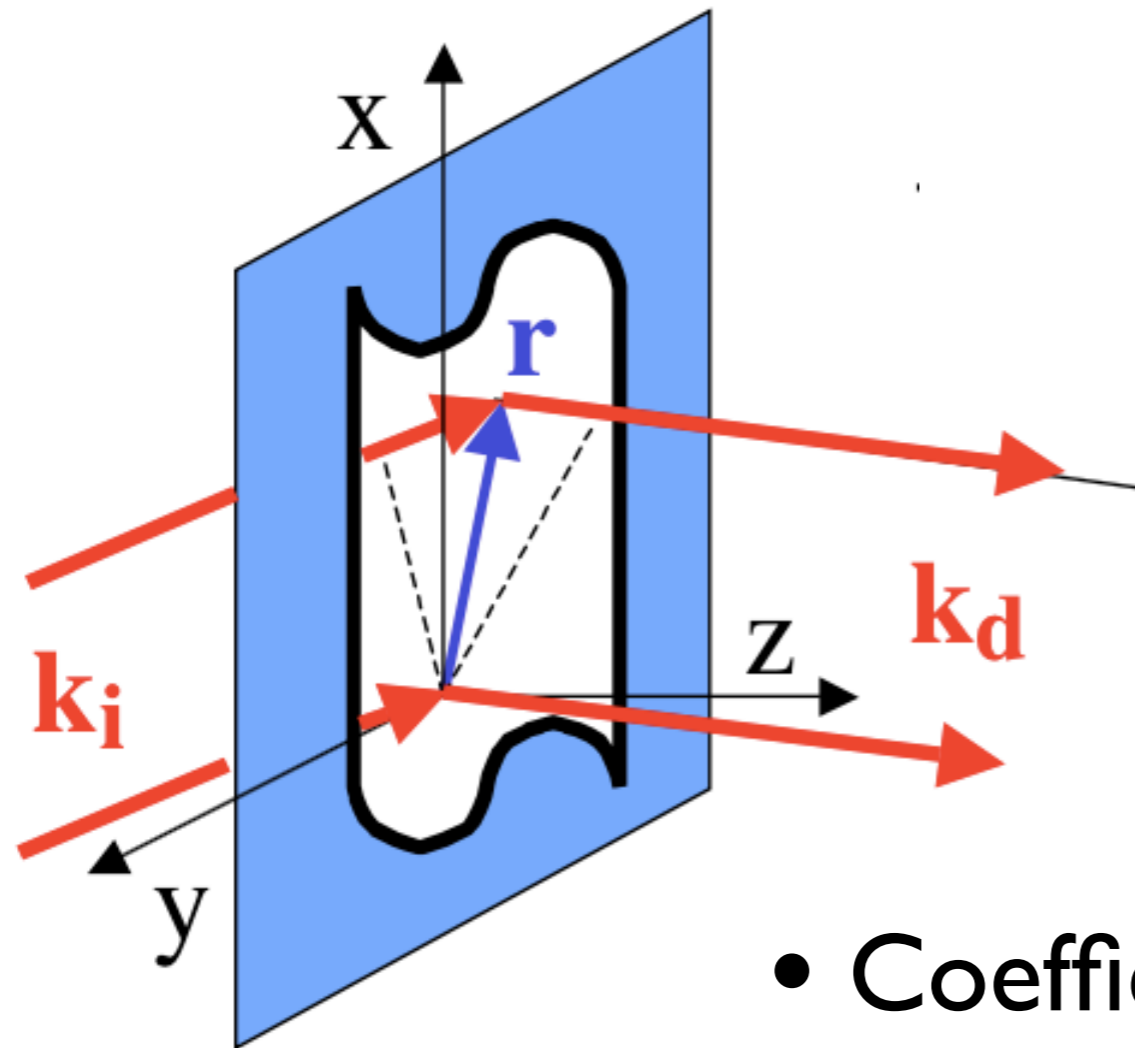
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

- Dériver en Fourier, c'est multiplier !

$$TF[f'](k) = ik \times TF[f](k)$$

$$TF[f'](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-ikx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) (-ik) e^{-ikx} dx$$

Réalisation naturelle de la TF : diffraction à l'infini



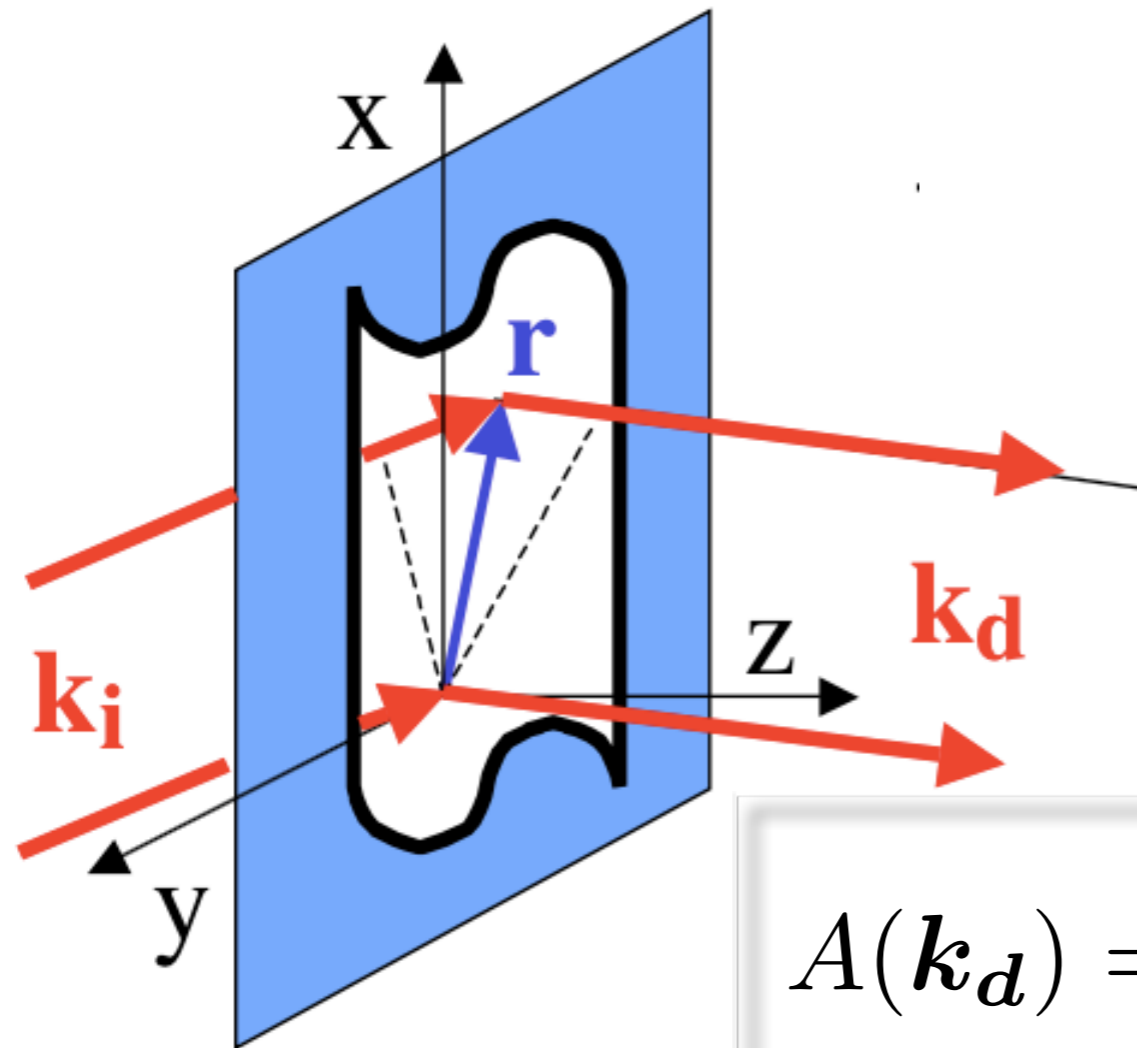
- Source et écran d'observation à l'infini

• Amplitude diffractée dans la direction k_d ?

- Coefficient de transmission

$$T(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si l'objet est transparent} \\ 0 & \text{si l'objet est opaque} \end{cases}$$

Réalisation naturelle de la TF : diffraction à l'infini



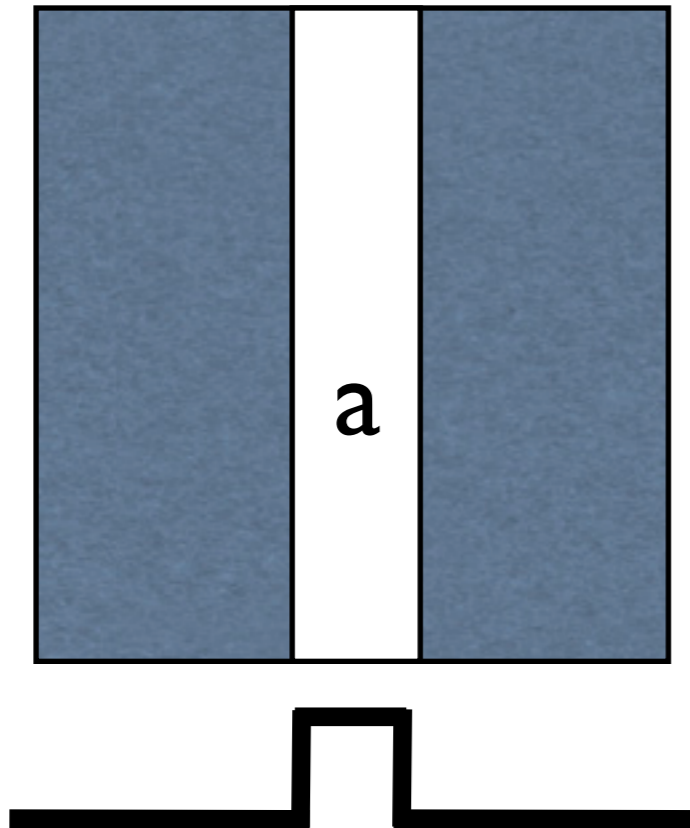
- Principe de Huygens-Fresnel : somme des ondes partielles, avec déphasage

$$A(\mathbf{k}_d) = A_i \int d^2\mathbf{r} T(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i)}$$

Amplitude diffractée : TF à
deux dimensions de $T(\mathbf{r}) = T(x, y)$!

Diffraction et TF : exemples

- Fente de largeur a  TF de la fonction créneau

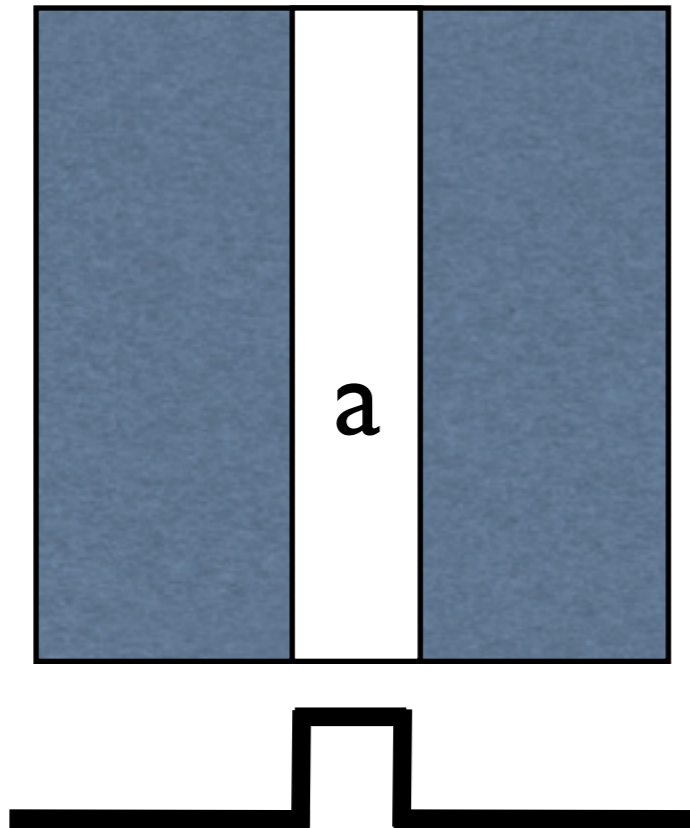


Diffraction et TF : exemples

- Fente de largeur a  TF de la fonction créneau

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-ikx} dx = \frac{ae^{-ika/2}}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(ka/2)$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



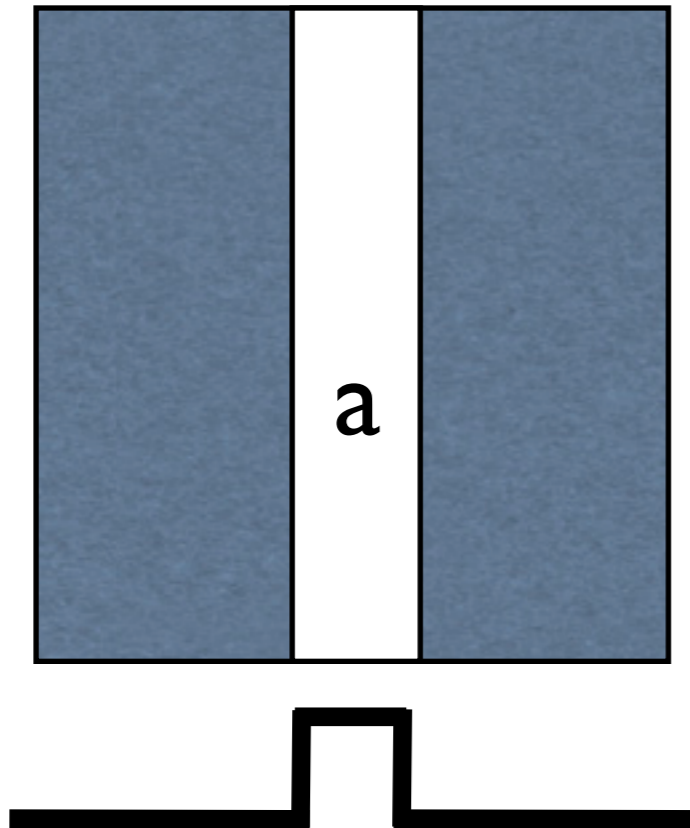
Diffraction et TF : exemples

- Fente de largeur a  TF de la fonction créneau

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-ikx} dx = \frac{ae^{-ika/2}}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(ka/2)$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

- Intensité $= |A(k_x)|^2 \propto \text{sinc}^2(k_x a/2)$



Diffraction et TF : exemples

- Fente de largeur a \rightarrow TF de la fonction créneau

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-ikx} dx = \frac{ae^{-ika/2}}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(ka/2)$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

- Intensité $= |A(k_x)|^2 \propto \text{sinc}^2(k_x a/2)$

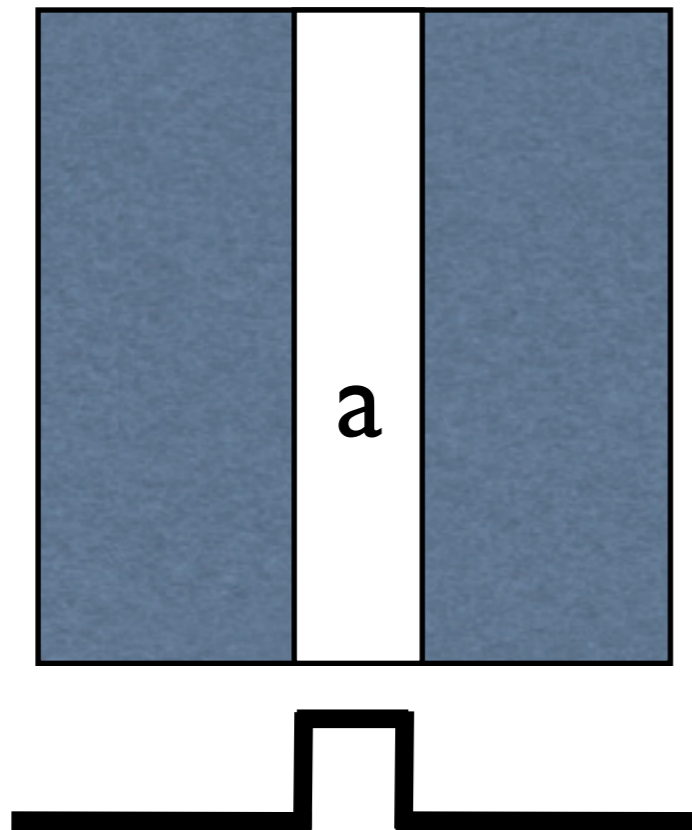
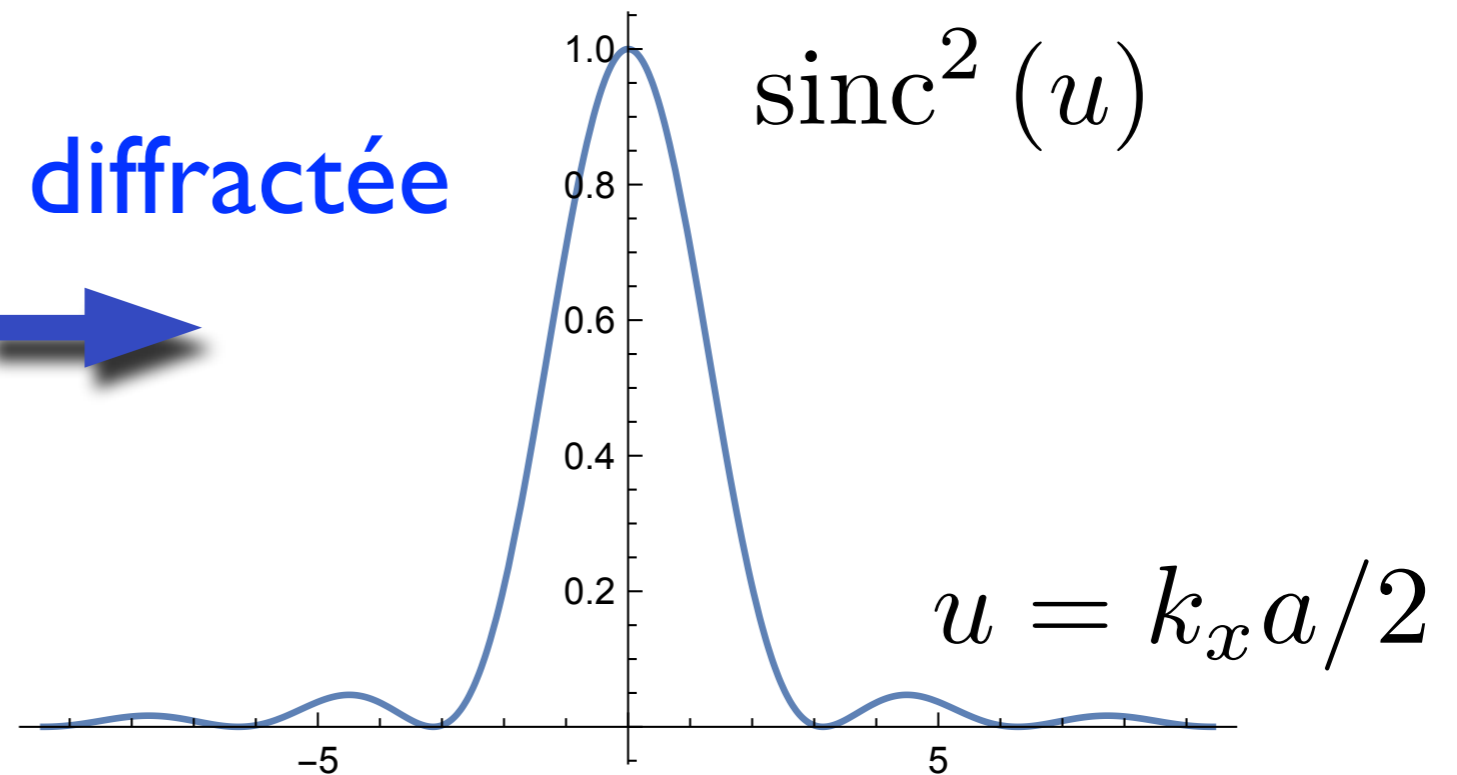


Image diffractée \rightarrow



Diffraction et TF : exemples

- Fente de largeur a \rightarrow TF de la fonction créneau

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-ikx} dx = \frac{ae^{-ika/2}}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(ka/2)$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

- Intensité $= |A(k_x)|^2 \propto \text{sinc}^2(k_x a/2)$

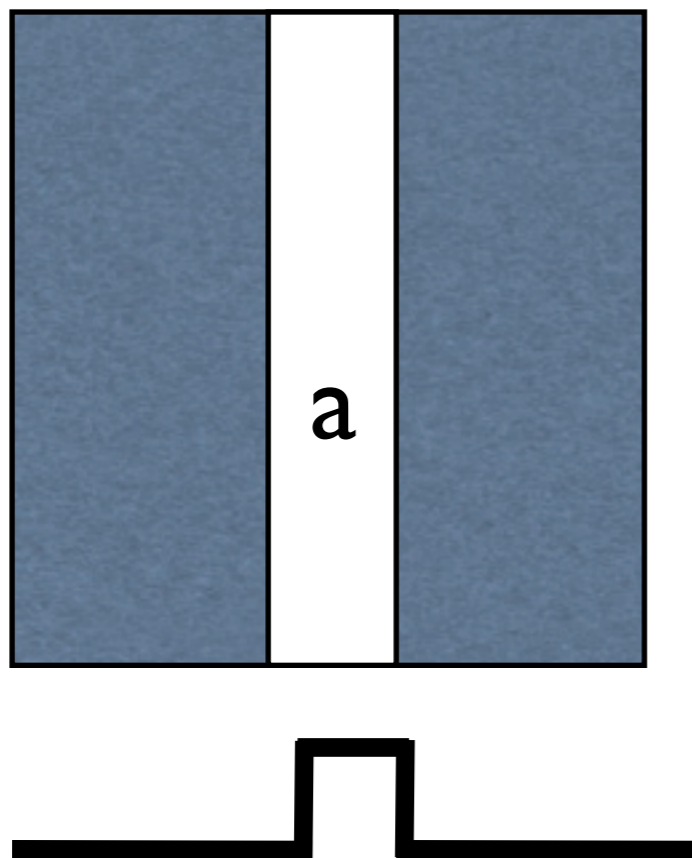
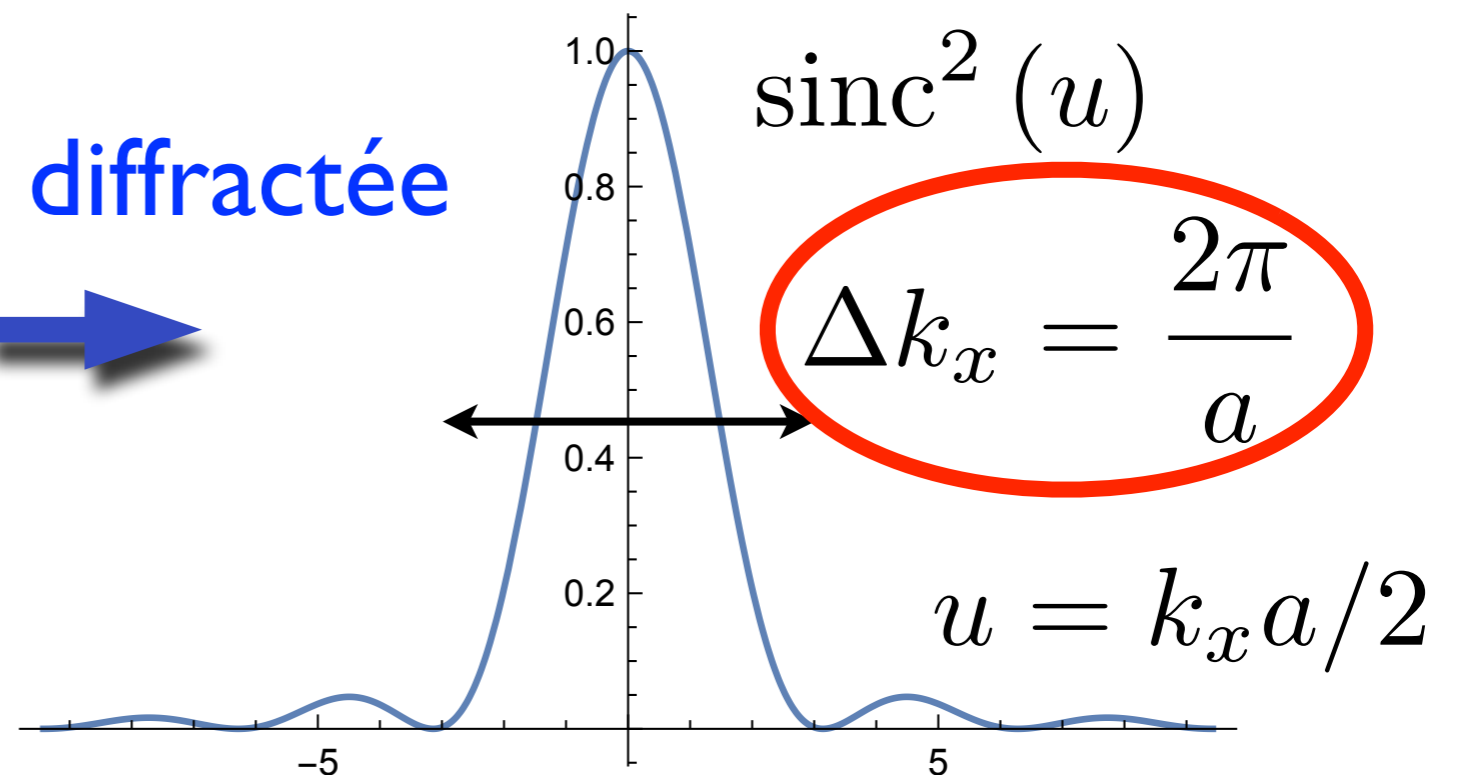


Image diffractée \rightarrow



Diffraction et TF : exemples

- Diffraction par une **fente rectangulaire**

$$|A(k_x, k_y)|^2 \propto \text{sinc}^2(k_x a/2) \text{sinc}^2(k_y b/2)$$

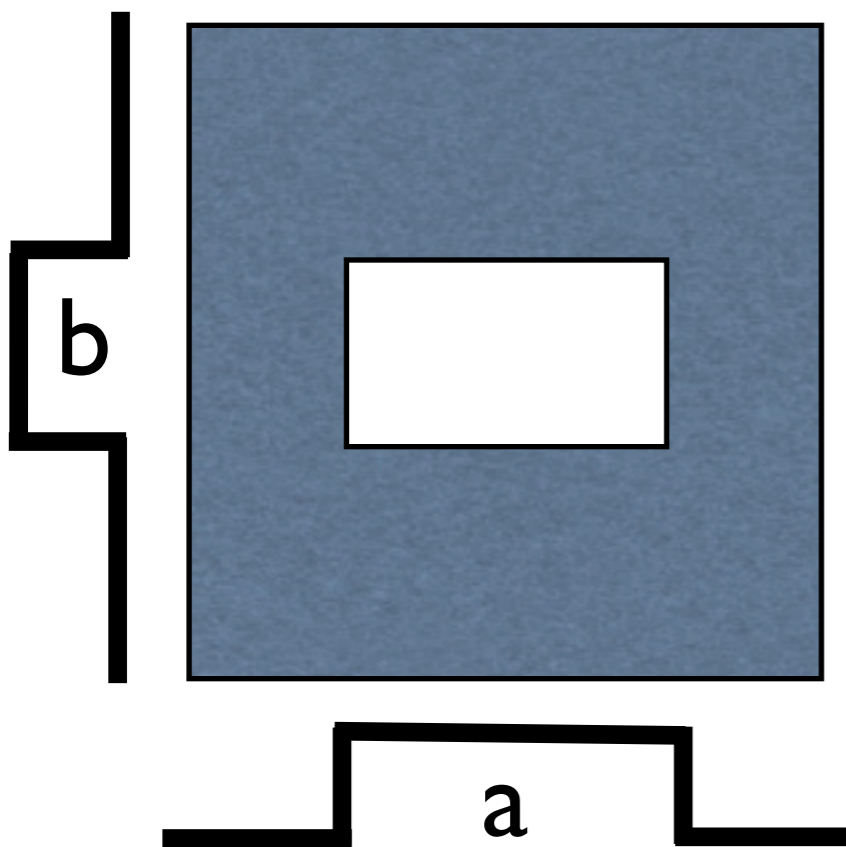
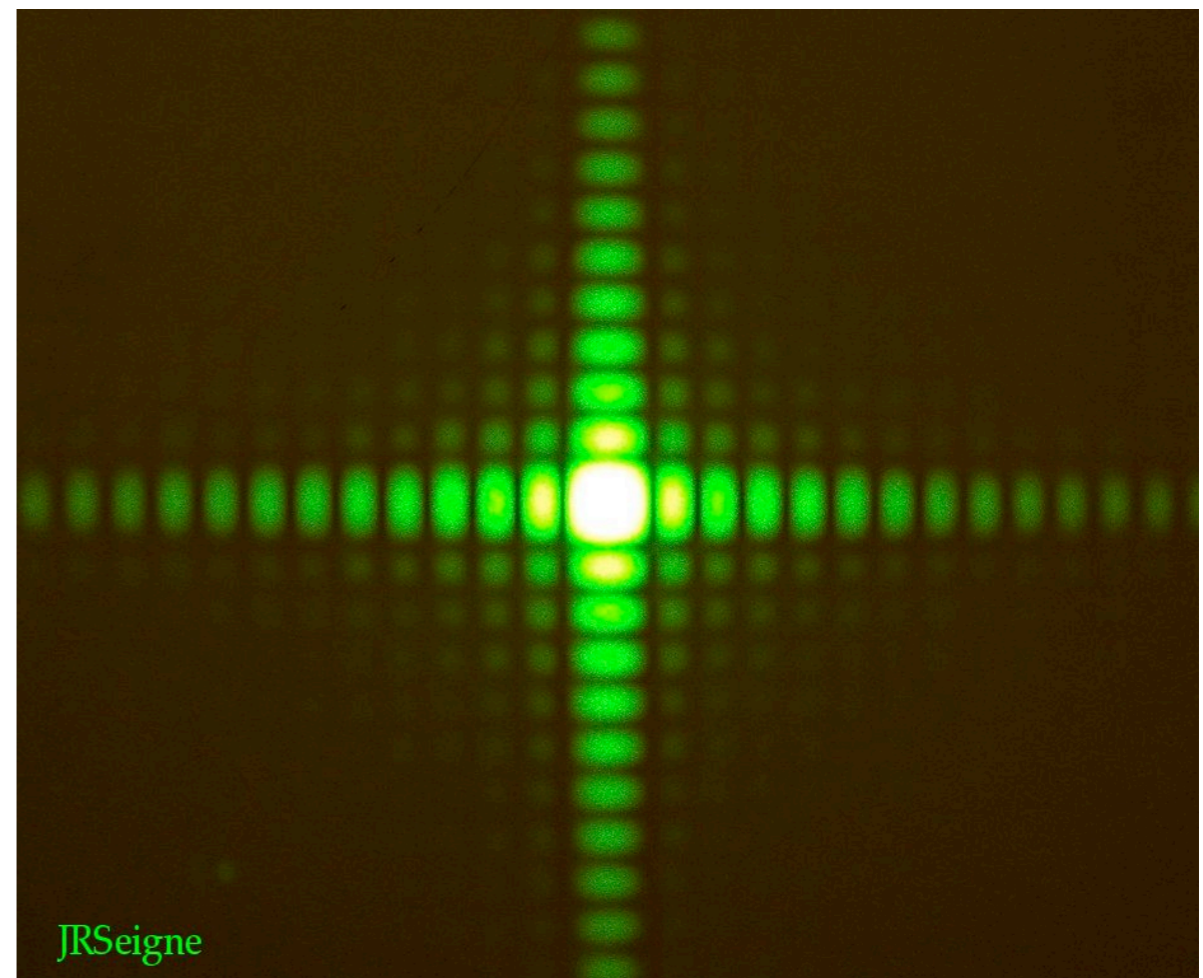


Image
diffractée



Diffraction et TF : exemples

- Diffraction par une **fente rectangulaire**

$$|A(k_x, k_y)|^2 \propto \text{sinc}^2(k_x a/2) \text{sinc}^2(k_y b/2)$$

Ex : source de lumière observée
à travers un rideau

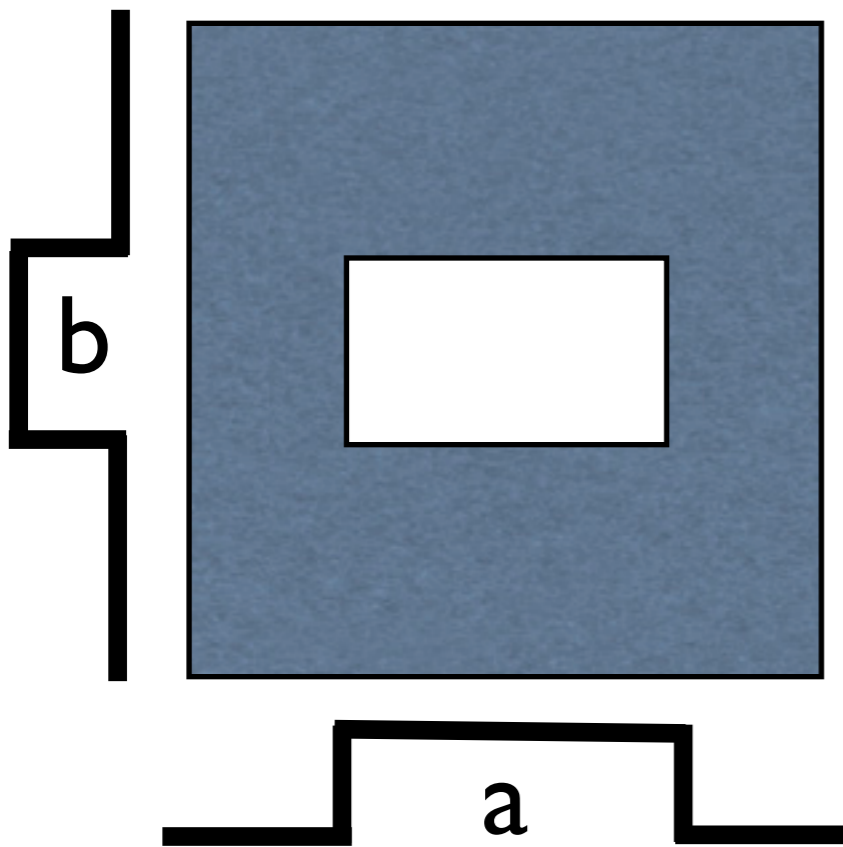


Image
diffractée



Diffraction et TF : exemples

- Diffraction par une fente circulaire

$$|A(k_r)|^2 \propto \left| \frac{J_1(k_r a/2)}{k_r a/2} \right|^2$$

$J_1(x)$ fonction de Bessel

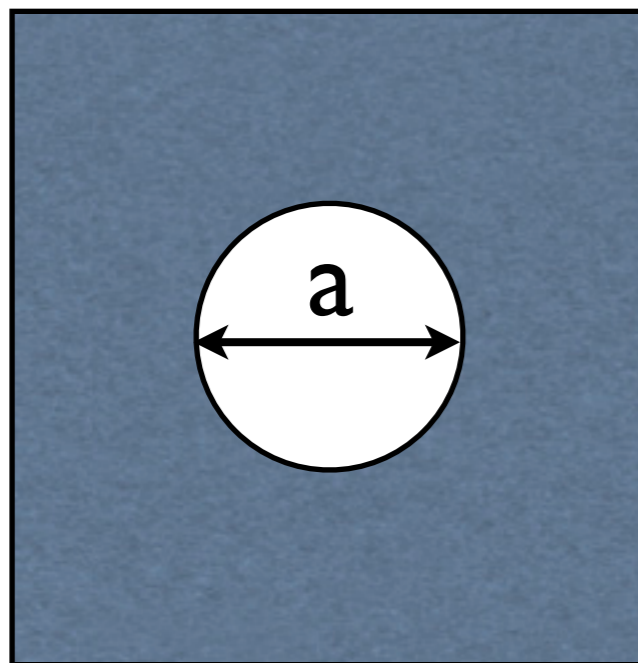
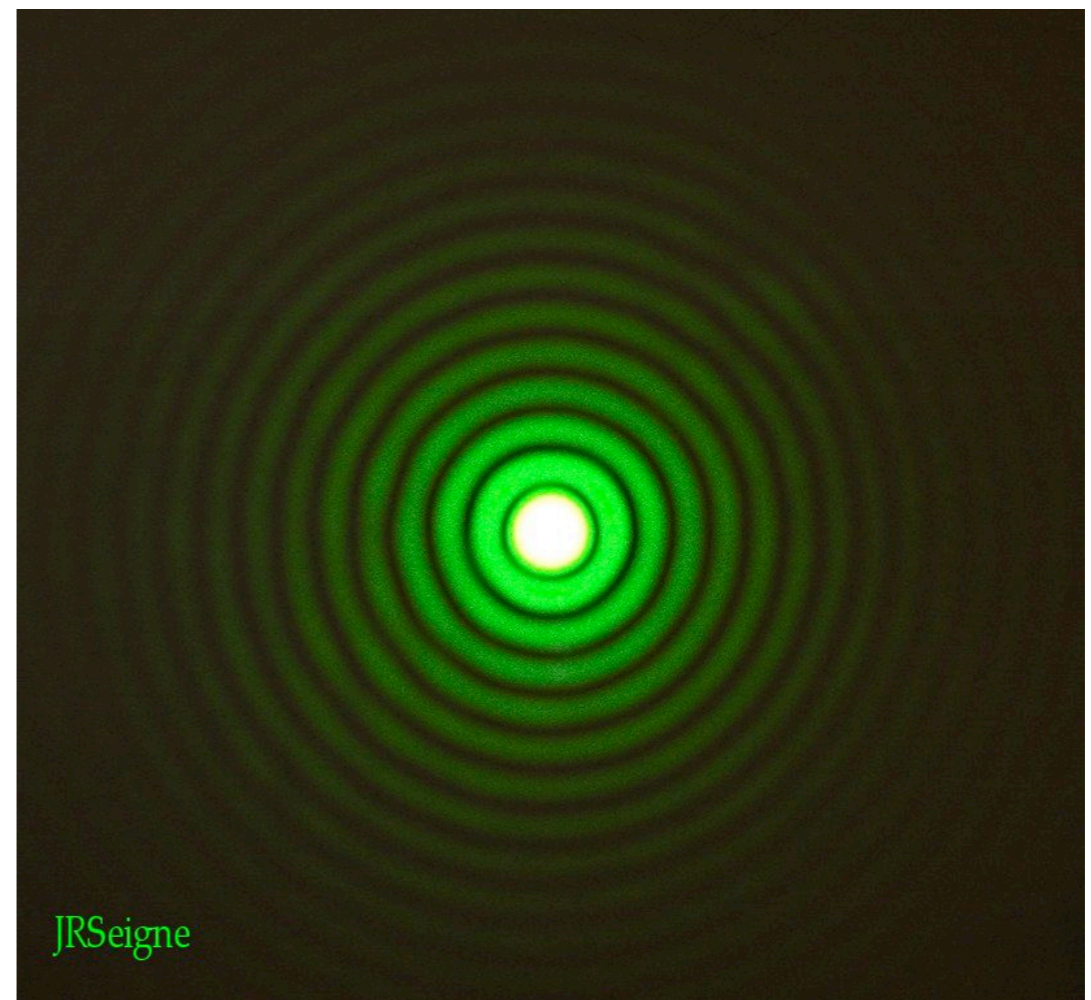


Image
diffractée



JRSeigne

Diffraction et TF : exemples

- Diffraction par une fente circulaire

$$|A(k_r)|^2 \propto \left| \frac{J_1(k_r a/2)}{k_r a/2} \right|^2$$

$J_1(x)$ fonction de Bessel

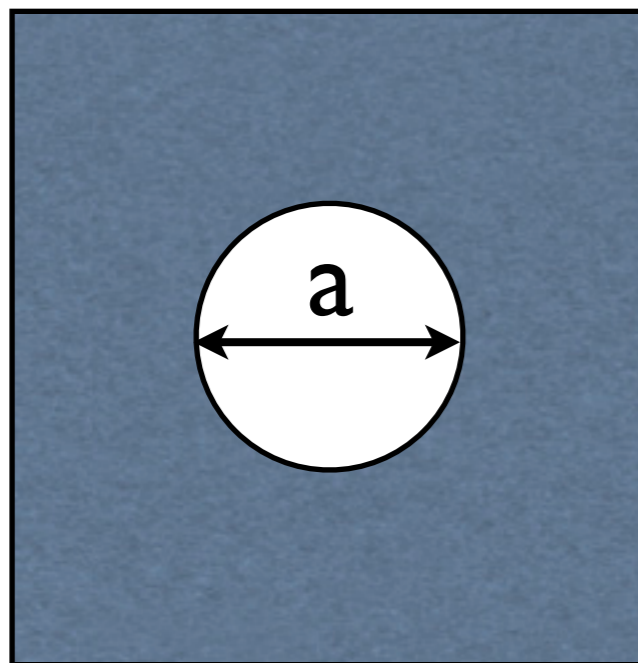
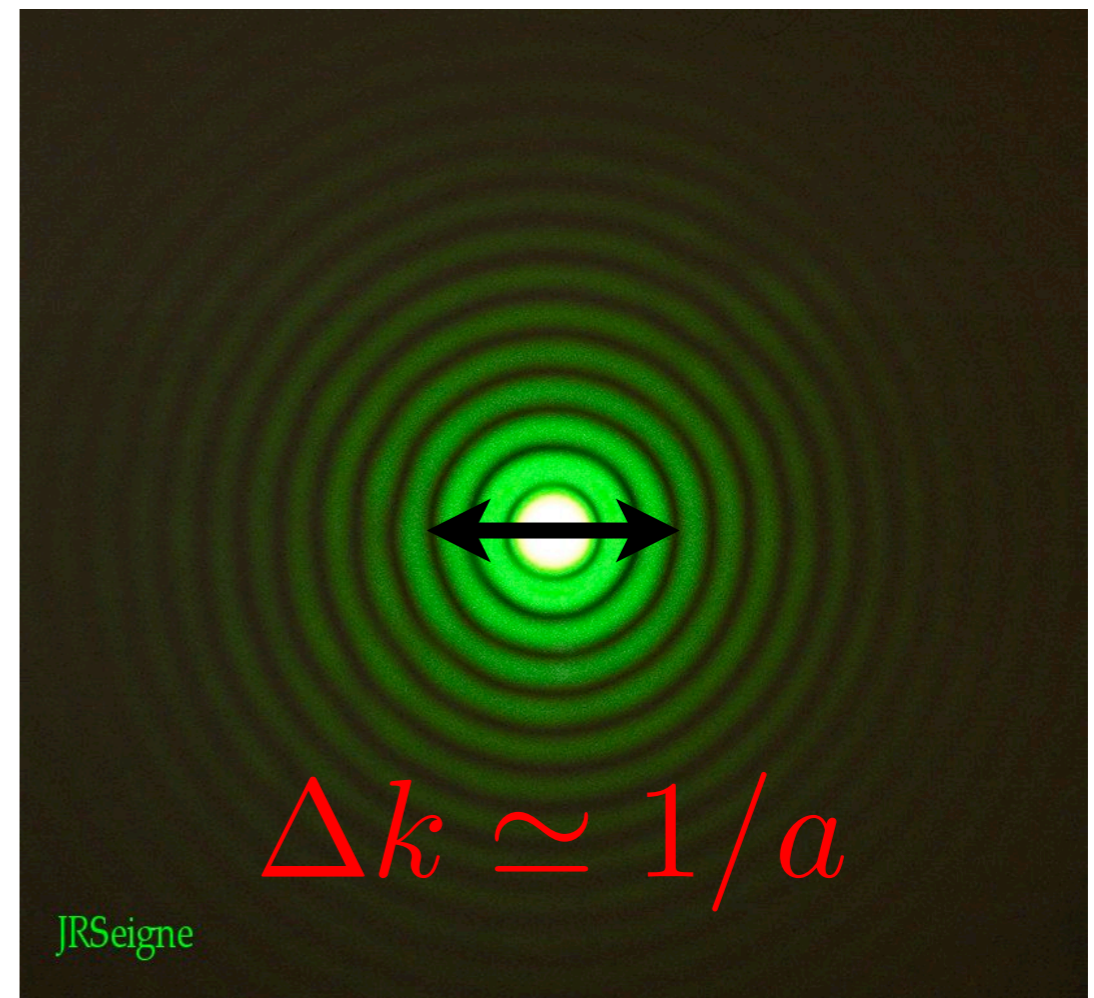
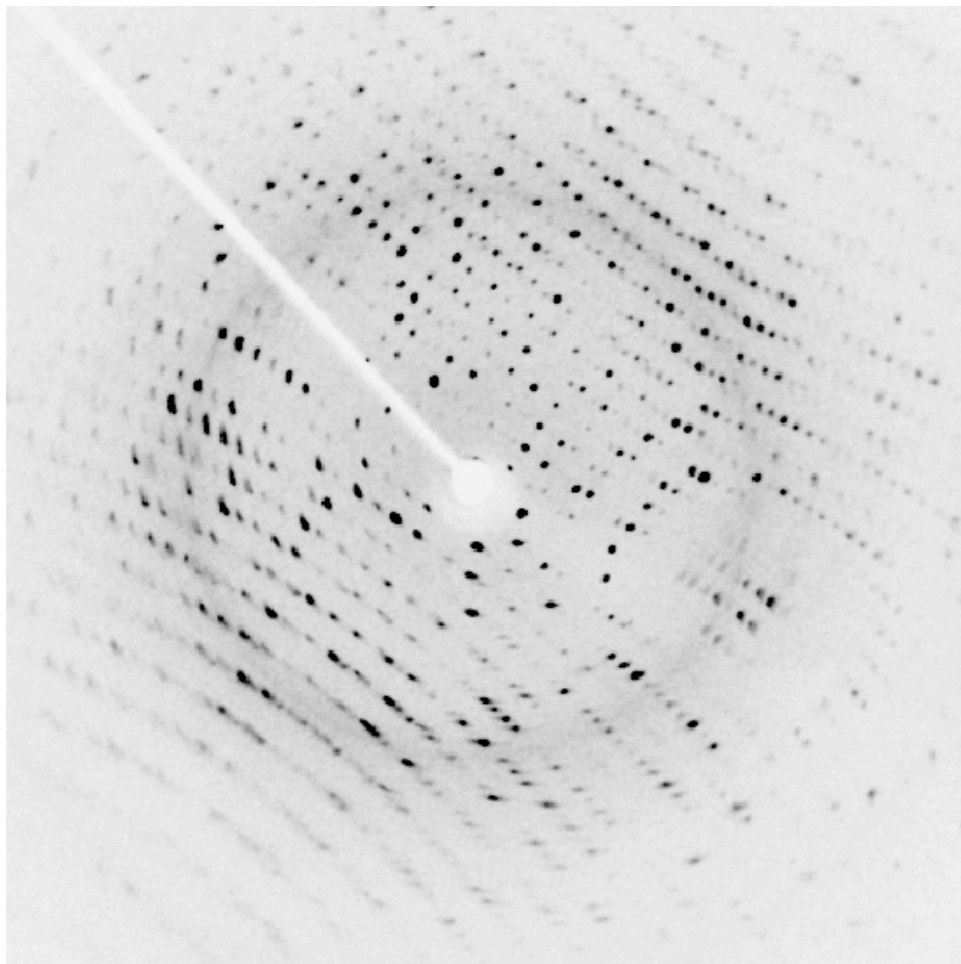


Image
diffractée

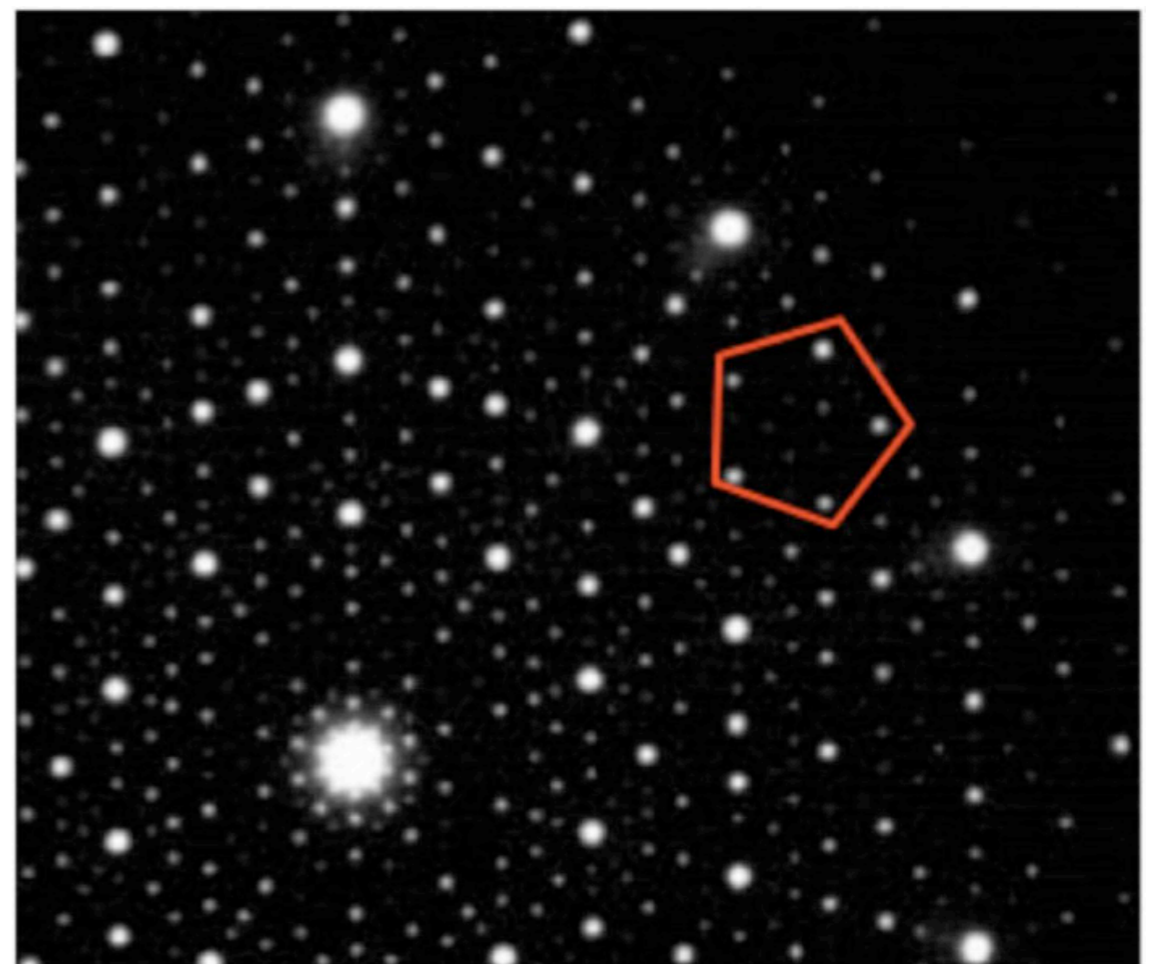


Diffraction et TF : exemples

Diffraction valable également pour des **ondes de matière** (physique quantique)



Cliché de diffraction d'un cristal de lysozyme



Symétrie d'ordre 5 observée par diffraction électronique dans un cristal

TRAITEMENT D'IMAGES

Convolution

- **Convolution** de deux fonctions :

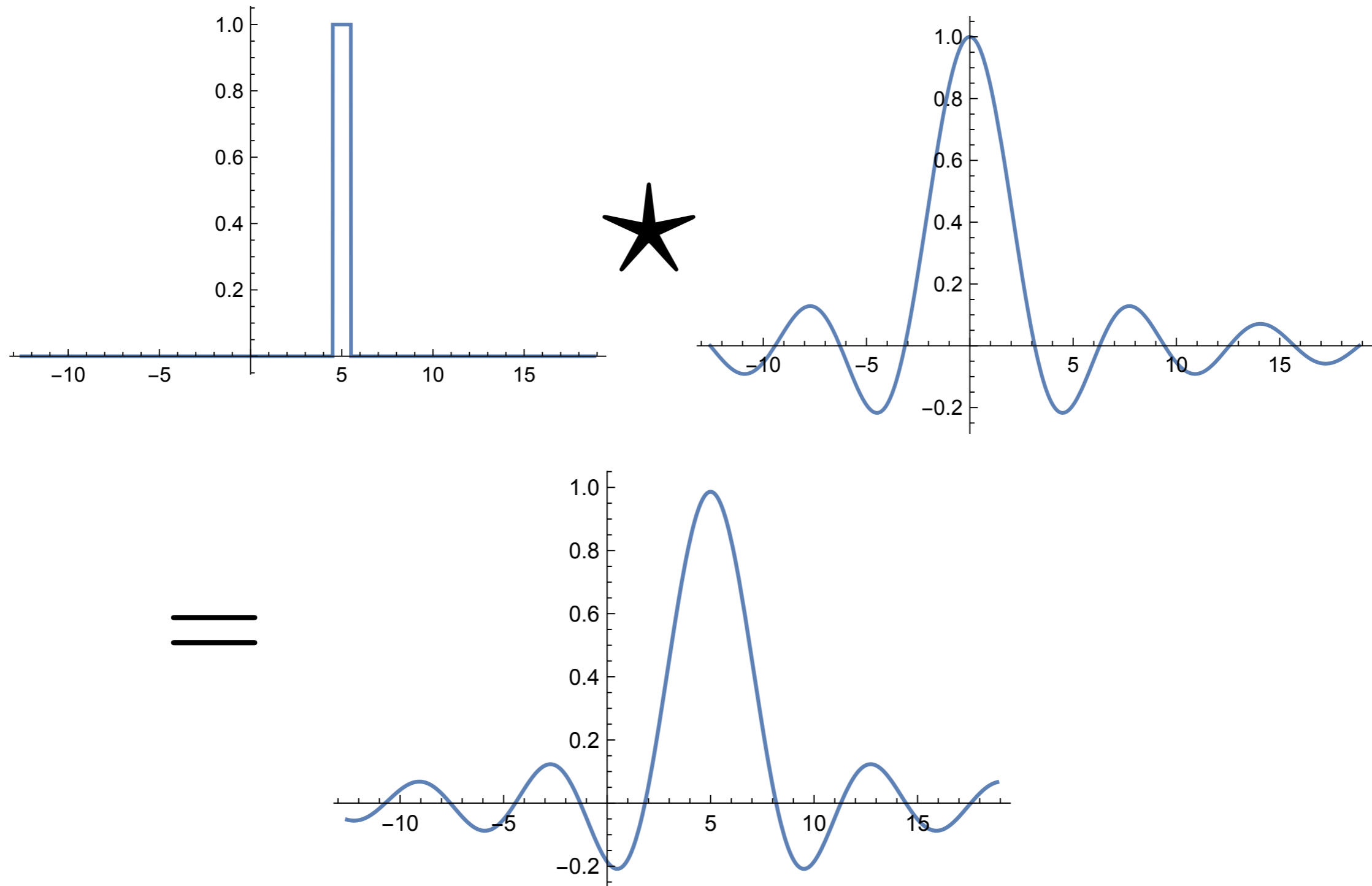
$$(f \star g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

- De manière très générique, on a souvent en physique :

signal de sortie = instrument \star signal d'entrée

Effet de la convolution :

- Convolution de deux fonctions : effet de moyennage et lissage.



Fourier et convolution

- La TF d'une convolution est le **simple produit** des TF :

$$TF [f \star g] = TF[f] \times TF[g]$$

Fourier et convolution

- La TF d'une convolution est le **simple produit** des TF :

$$TF [f \star g] = TF[f] \times TF[g]$$

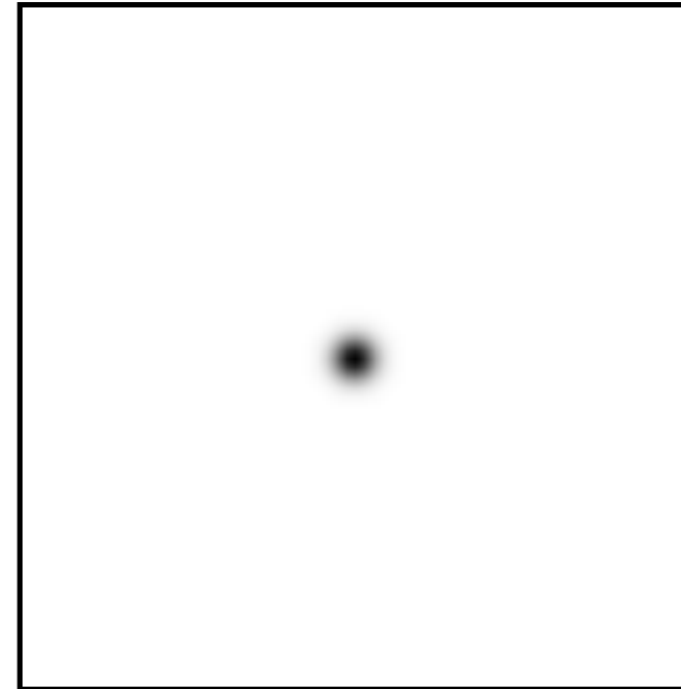
signal de sortie = instrument \star signal d'entrée



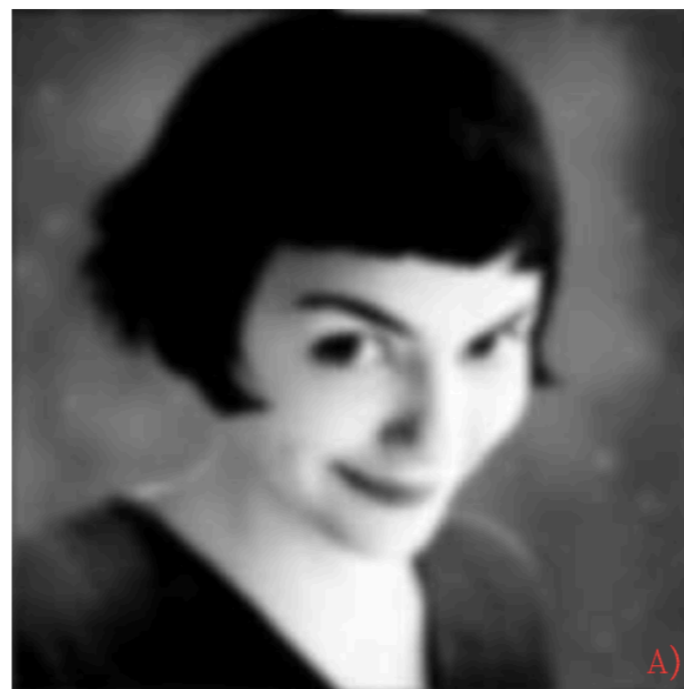
$$\text{entree} = TF^{-1} \left[\frac{TF[\text{sortie}]}{TF[\text{instrument}]} \right]$$

« Défloutage » d'une photo

- En cas de mauvaise mise au point, convolution avec la forme du diaphragme de l'objectif :

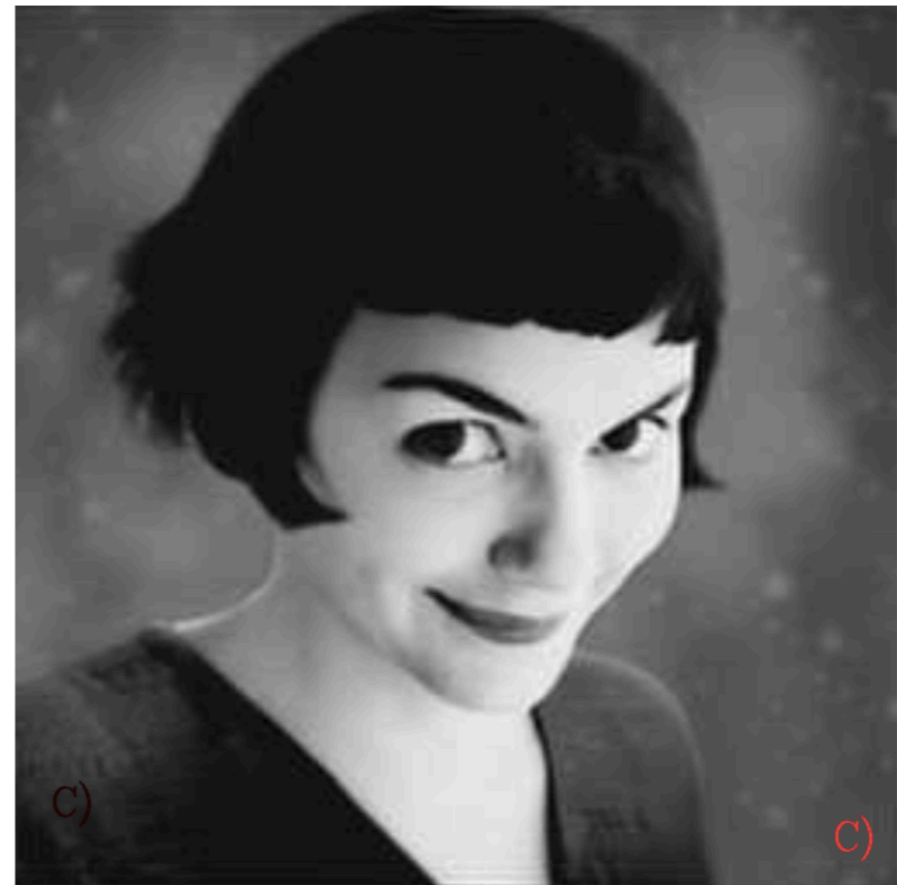


=



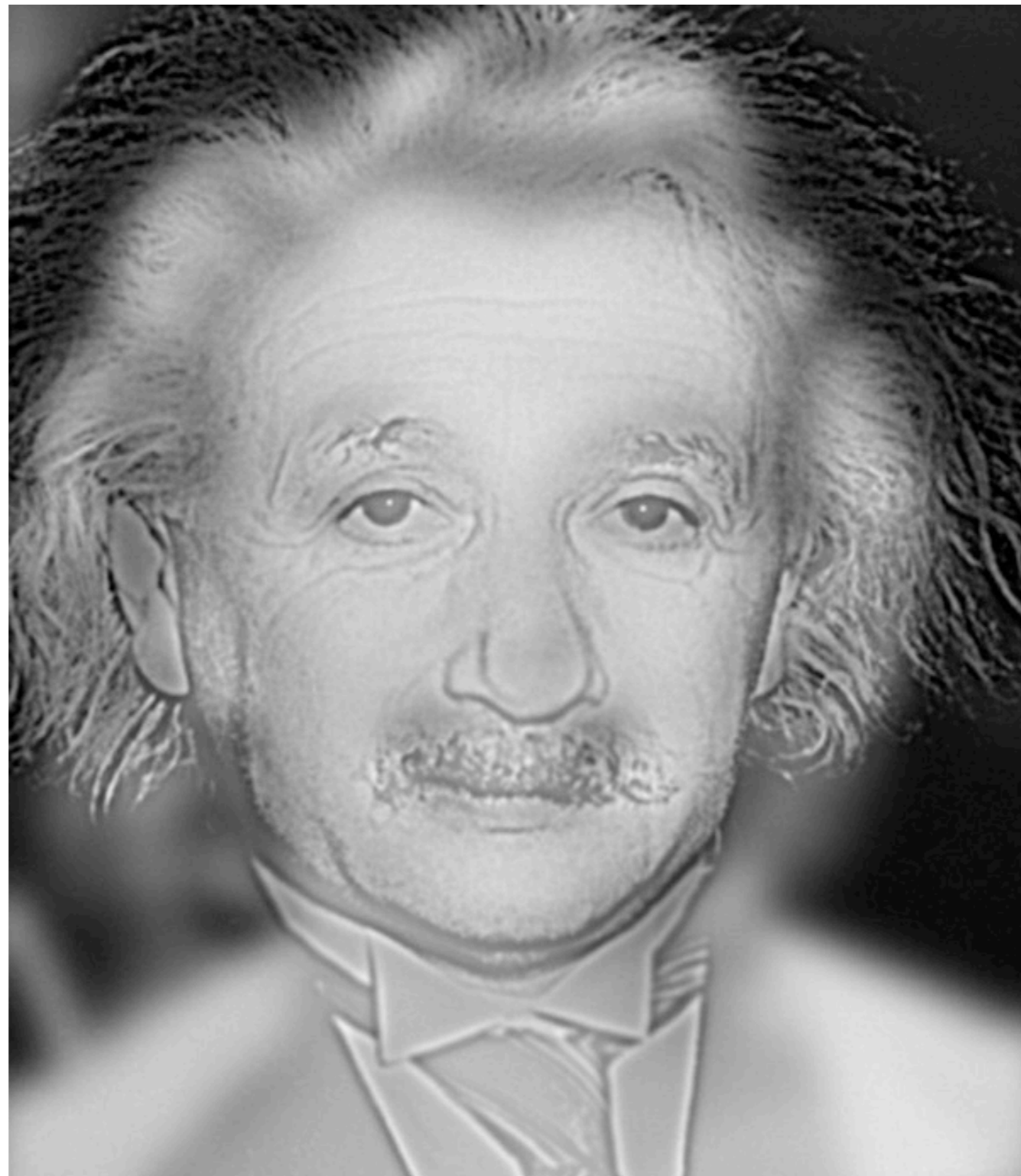
« Défloutage » d'une photo

- La connaissance de la forme du diaphragme permet de déconvoluer :



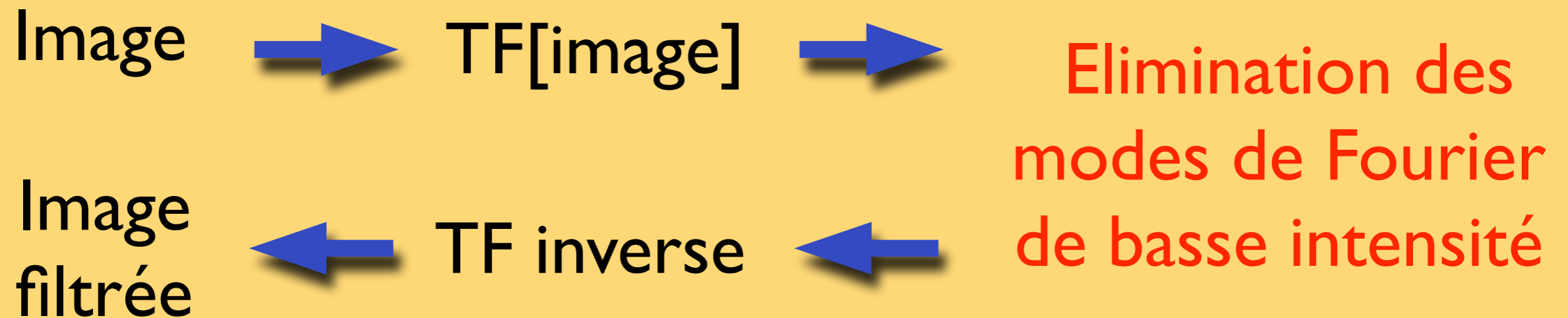
$$\text{image nette} = \text{TF}^{-1} \left[\frac{\text{TF}[\text{image floue}]}{\text{TF}[\text{diaphragme}]} \right]$$

Filtrage d'image



Credit :Aude Oliv, MIT

Principe de la compression JPEG



Original

8400 modes/32768

3200 modes/32768

857 modes /32768



PHYSIQUE
QUANTIQUE

Equation de Schrödinger

- En physique quantique, l'état d'une particule ponctuelle est décrit par une **fonction d'onde** $\psi(\mathbf{r}, t)$

- **Probabilité de mesurer la particule** à la position \mathbf{r} dans un volume élémentaire d^3r densité de probabilité

$$d^3P = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$$

- Equation d'évolution de la fonction d'onde (particule libre)


$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Résolution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

- On utilise la transformation de Fourier : TF $[\psi(\mathbf{r}, t)] = \hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$


$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$$

- Simple intégration : $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = \hat{\psi}(\mathbf{k}, 0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$ avec $\omega_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m}$
- Solution générale : superposition d'ondes planes

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, 0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

Densité de probabilité d'impulsion

- Solution générale pour une particule libre : paquet d'ondes

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, 0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

Contribution de l'onde plane $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$ dans le paquet d'ondes

Densité de probabilité d'impulsion

- Solution générale pour une particule libre : paquet d'ondes

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, 0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

Contribution de l'onde plane $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$ dans le paquet d'ondes

- Plus généralement, la densité de probabilité pour l'« impulsion » est donnée par $|\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)|^2$

Densité de probabilité d'impulsion

- Solution générale pour une particule libre : paquet d'ondes

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, 0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

Contribution de l'onde plane $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$ dans le paquet d'ondes

- Plus généralement, la densité de probabilité pour l'« impulsion » est donnée par $|\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)|^2$

- Bien cohérent mathématiquement car (égalité de Parseval)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)|^2 d^3 \mathbf{k} = 1 \quad (\text{probabilité totale})$$

Largeur d'une fonction et de sa TF

- Fonction f quelconque et sa transformée de Fourier \hat{f}

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(k)|^2 dk = 1 \quad (\text{convention})$$

Largeur d'une fonction et de sa TF

- Fonction f quelconque et sa transformée de Fourier \hat{f}

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(k)|^2 dk = 1 \quad (\text{convention})$$

- $|f(x)|^2$ et $|\hat{f}(k)|^2$ peuvent être considérées comme des **densités de probabilité** pour les variables aléatoires x et k

Largeur d'une fonction et de sa TF

- Fonction f quelconque et sa transformée de Fourier \hat{f}

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(k)|^2 dk = 1 \quad (\text{convention})$$

- $|f(x)|^2$ et $|\hat{f}(k)|^2$ peuvent être considérées comme des **densités de probabilité** pour les variables aléatoires x et k



- **Valeurs moyennes** : $\langle x \rangle = \int x |f(x)|^2 dx$ et $\langle k \rangle = \int k |\hat{f}(k)|^2 dk$

- **Dispersions** :

$$\Delta x^2 = \int (x - \langle x \rangle)^2 |f(x)|^2 dx \quad \text{et} \quad \Delta k^2 = \int (k - \langle k \rangle)^2 |\hat{f}(k)|^2 dk$$

Largeur d'une fonction et de sa TF

- Fonction f quelconque et sa transformée de Fourier \hat{f}

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(k)|^2 dk = 1 \quad (\text{convention})$$

- $|f(x)|^2$ et $|\hat{f}(k)|^2$ peuvent être considérées comme des **densités de probabilité** pour les variables aléatoires x et k



- **Valeurs moyennes** : $\langle x \rangle = \int x |f(x)|^2 dx$ et $\langle k \rangle = \int k |\hat{f}(k)|^2 dk$

- **Dispersion** :

$$\Delta x^2 = \int (x - \langle x \rangle)^2 |f(x)|^2 dx \quad \text{et} \quad \Delta k^2 = \int (k - \langle k \rangle)^2 |\hat{f}(k)|^2 dk$$

On va montrer que

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

**Propriété
intrinsèque à la TF !**

Démonstration

- Quitte à considérer $X = x - \langle x \rangle$ et $K = k - \langle k \rangle$ on peut considérer que les variables aléatoires sont centrées (de moyenne nulle).
- On va montrer que le polynôme du second degré de la variable réelle λ

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx \geq 0$$

vérifie

$$P(\lambda) = \Delta x^2 - \lambda + \Delta k^2 \lambda^2$$

donc le discriminant doit être négatif ou nul :

$$1 - 4\Delta x^2 \Delta k^2 \leq 0$$



$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

Démonstration

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx$$

On développe

$$P(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dx (x^2 |f(x)|^2 + \lambda x (f(x) f'^*(x) + \text{c.c.}) + \lambda^2 |f'(x)|^2)$$

Démonstration

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx$$

On développe

$$P(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dx (x^2 |f(x)|^2 + \lambda x (f(x) f'^*(x) + \text{c.c.}) + \lambda^2 |f'(x)|^2)$$

définition



$$P(\lambda) = \Delta x^2$$

Démonstration

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx$$

On développe

$$P(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dx (x^2 |f(x)|^2 + \lambda x (f(x) f'^*(x) + \text{c.c.}) + \lambda^2 |f'(x)|^2)$$

définition

intégration
par parties

$$P(\lambda) = \Delta x^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 .$$

Démonstration

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx$$

On développe

$$P(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dx (x^2 |f(x)|^2 + \lambda x (f(x) f'^*(x) + \text{c.c.}) + \lambda^2 |f'(x)|^2)$$

définition

intégration
par parties

$$P(\lambda) = \Delta x^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} dx |f'(x)|^2$$

Démonstration

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx$$

On développe

$$P(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dx (x^2 |f(x)|^2 + \lambda x (f(x) f'^*(x) + \text{c.c.}) + \lambda^2 |f'(x)|^2)$$

définition

intégration
par parties

$$P(\lambda) = \Delta x^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} dx |f'(x)|^2$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}} dx |f'(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dk |\hat{f}'(k)|^2$$

égalité de Parseval

Démonstration

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx$$

On développe

$$P(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dx (x^2 |f(x)|^2 + \lambda x (f(x) f'^*(x) + \text{c.c.}) + \lambda^2 |f'(x)|^2)$$

définition

intégration
par parties

$$P(\lambda) = \Delta x^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} dx |f'(x)|^2$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}} dx |f'(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dk |\hat{f}'(k)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dk k^2 |\hat{f}(k)|^2$$

égalité de Parseval

dérivée et TF

Démonstration

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx$$

On développe

$$P(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dx (x^2 |f(x)|^2 + \lambda x (f(x) f'^*(x) + \text{c.c.}) + \lambda^2 |f'(x)|^2)$$

définition

intégration
par parties

$$P(\lambda) = \Delta x^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} dx |f'(x)|^2$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}} dx |f'(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dk |\hat{f}'(k)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dk k^2 |\hat{f}(k)|^2 = \Delta k^2$$

égalité de Parseval

dérivée et TF

définition

Démonstration

- Quite à considérer $X = x - \langle x \rangle$ et $K = k - \langle k \rangle$ on peut considérer que les variables aléatoires sont centrées (de moyenne nulle).
- On va montrer que le polynôme du second degré de la variable réelle λ

$$P(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} |x f(x) + \lambda f'(x)|^2 dx \geq 0$$

vérifie

$$P(\lambda) = \Delta x^2 - \lambda + \Delta k^2 \lambda^2$$

donc le discriminant doit être négatif ou nul :

$$1 - 4\Delta x^2 \Delta k^2 \leq 0$$



$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

« Application »

- **Diffraction** : plus une fente est étroite, plus l'image diffractée est large (déjà observée sur des exemples).

- **Relation d'incertitude de Heisenberg**

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad p = \hbar k$$



impulsion



$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Importance fondamentale pour la physique quantique !

Conclusion

- Inhérent au phénomène de diffraction et à la physique quantique.
- Utilisé au quotidien dans le traitement du signal, cad dans tous nos appareils numériques !
- Résolution des équations différentielles de la physique : chaleur, ondes, mécanique quantique, cosmologie, biologie ...

Conclusion

- Analyse de Fourier : décomposer un signal (son, image, mesure physique quelconque, etc) en fréquences.
- Phénomène complexe en espace réel : **superposition de phénomènes simples en espace de Fourier.**
- J'espère vous avoir montré comment, souvent, **les scientifiques pensent en (espace de) Fourier.**

Conclusion

- **Henri Poincaré** : « la Théorie de la Chaleur de Fourier est un des premiers exemples d'application de l'analyse à la physique [...]. Les résultats qu'il a obtenus sont certes intéressants par eux-mêmes, mais ce qui l'est plus encore est **la méthode qu'il a employée pour y parvenir et qui servira toujours de modèle à tous ceux qui voudront cultiver une branche quelconque de la physique mathématique.** »

