

Mouvements des étoiles dans notre Galaxie

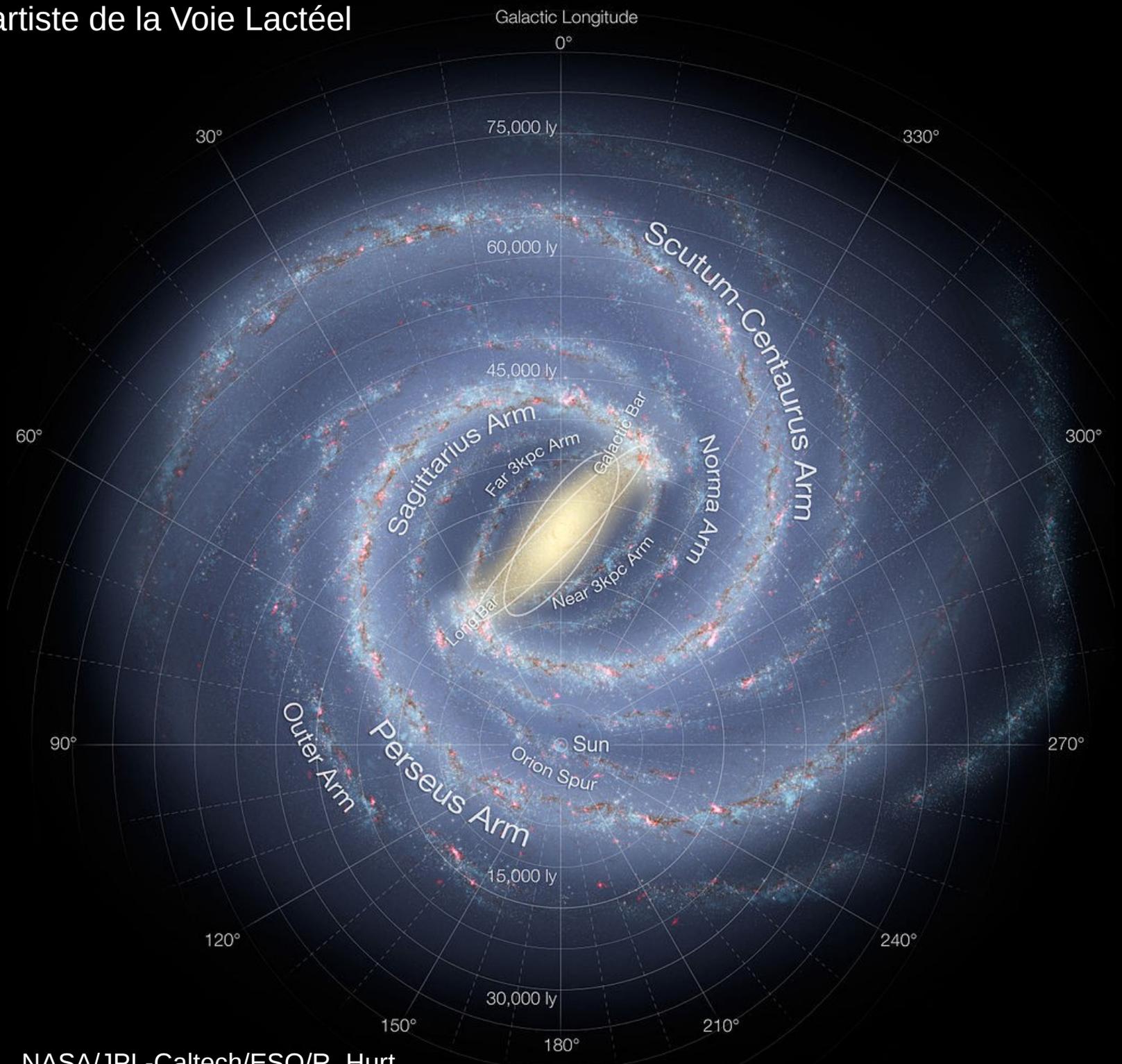
Daniel Pfenniger



Modèle d'artiste de la Voie Lactée



Modèle d'artiste de la Voie Lactée



NGC 6217



NGC 1365



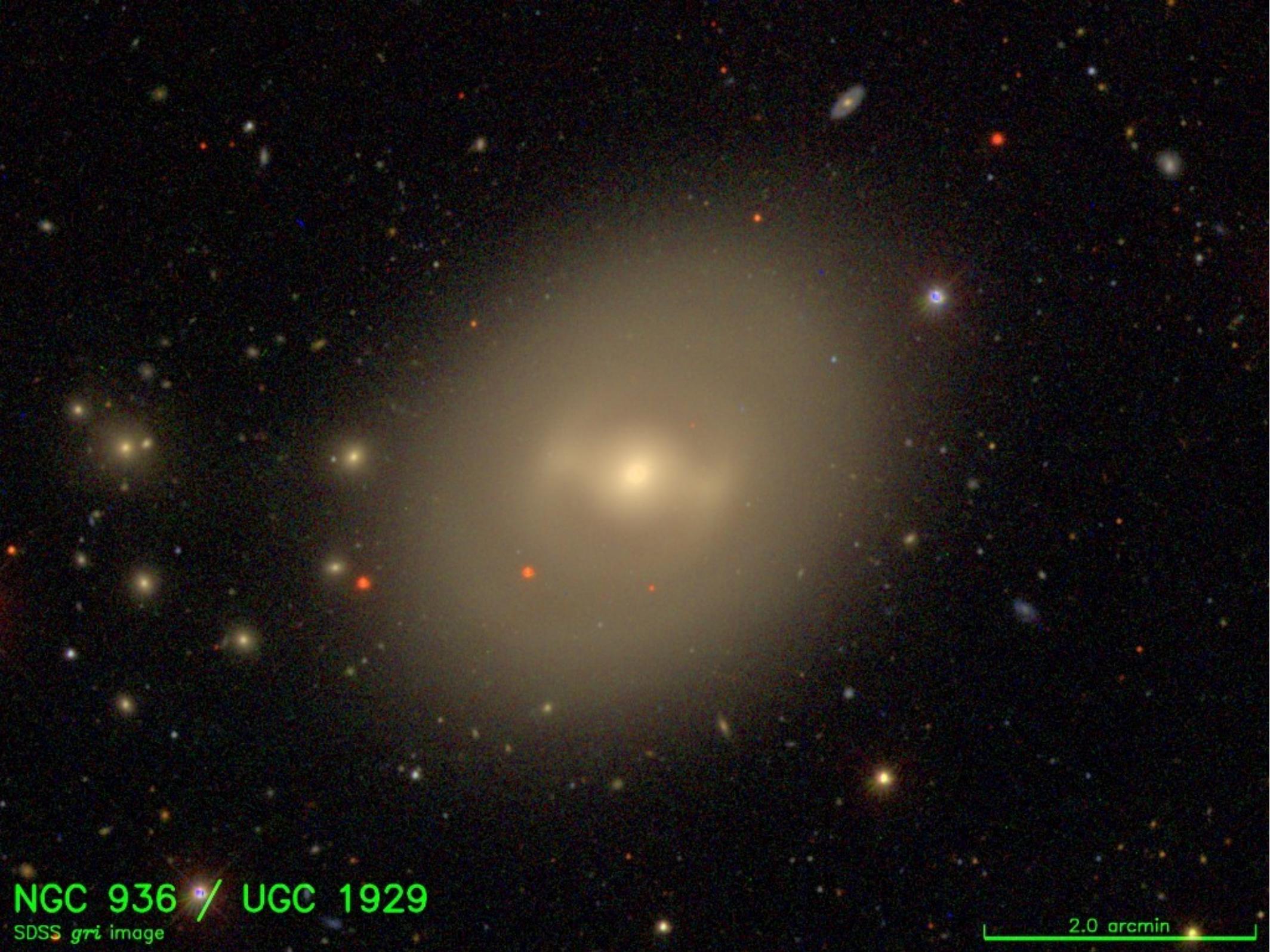
M95



Adam Block/Mount Lemmon SkyCenter/University of Arizona

NGC 2217





NGC 936 / UGC 1929
SDSS *gri* image

2.0 arcmin

Plan

- Décrire les mouvements possibles des étoiles (dont le Soleil) dans une galaxie comme la nôtre : cercles, ellipses ou ?
- Initier à utiliser toute la puissance des ordinateurs disponibles
- Octave/Matlab : logiciel de calcul scientifique/technique répandu couplant calcul numérique vectoriel et graphique
Matlab : logiciel commercial
Octave : logiciel libre ~compatible avec l'essentiel de Matlab
- Alternative : Python avec Numpy, Scipy, Matplotlib +....

Gravité

Problème : décrire la fonction du potentiel gravitationnel $\Phi(x)$ généré par une distribution de matière $\rho(x)$. Avec $\rho(x)$ connu, l'accélération en chaque point peut être évaluée en prenant son gradient :

$$\vec{a} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]$$

- Si $\rho(x)$ est imposé, trouver $\Phi(x)$:
précis mais difficile exprimer en terme de fonctions simples:
intégrale triple de Poisson :

$$\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dx'^3$$

Exemples de densités galactiques déduites des observations

- Disque exponentiel : $\rho(R, z) = \rho_0 \exp\left(\frac{-R}{h} - \frac{|z|}{h_z}\right)$
- Halo massif : $\rho(R, z) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{r^2}{h^2}}$
- Barre ellipsoïdale : $\rho(R, z) = \rho_0 \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \right]^2$

Le potentiel et force correspondants est lourd à calculer (évaluation d'intégrales elliptiques)

Gravité

Problème : décrire la fonction du potentiel gravitationnel $\Phi(\vec{x})$ généré par une distribution de matière $\rho(\vec{x})$. Avec $\rho(\vec{x})$ connu, l'accélération en chaque point peut être évaluée en prenant son gradient :

$$\vec{a} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]$$

- Si $\rho(\vec{x})$ est donné, trouver $\Phi(\vec{x})$:
difficile de trouver un potentiel qui corresponde à une densité positive et réaliste, mais facile à calculer à partir des dérivées secondes locales du potentiel:
équation différentielle de Poisson :

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)$$

Exemples de potentiels galactiques produisant des distributions ~raisonnables

- Point masse $\Phi(r) = -\frac{K}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $K > 0$

- Sphérique $\Phi(r) = -\frac{K}{\sqrt{r^2 + b^2}}$, $b \geq 0$

- Halo $\Phi(r) = \frac{K}{p} [r^2 + b^2]^{p/2}$, $-1 \leq p \leq 2$

- Disque $\Phi(R, z) = \frac{K}{p} [R^2 + (a + \sqrt{b^2 + z^2})^2]^{p/2}$, $R^2 = x^2 + y^2$, $a \geq 0$

- Barre
$$\Phi(x, y, z) = \frac{-GM}{\sqrt{A^2 + \frac{x^2}{1 + \frac{a^2}{A^2 + r^2}} + \frac{y^2}{1 + \frac{b^2}{A^2 + r^2}} + \frac{z^2}{1 + \frac{c^2}{A^2 + r^2}}}}$$

Calcul de la fréquence de rotation dans un disque

« Fréquence » = pulsation = vitesse/rayon

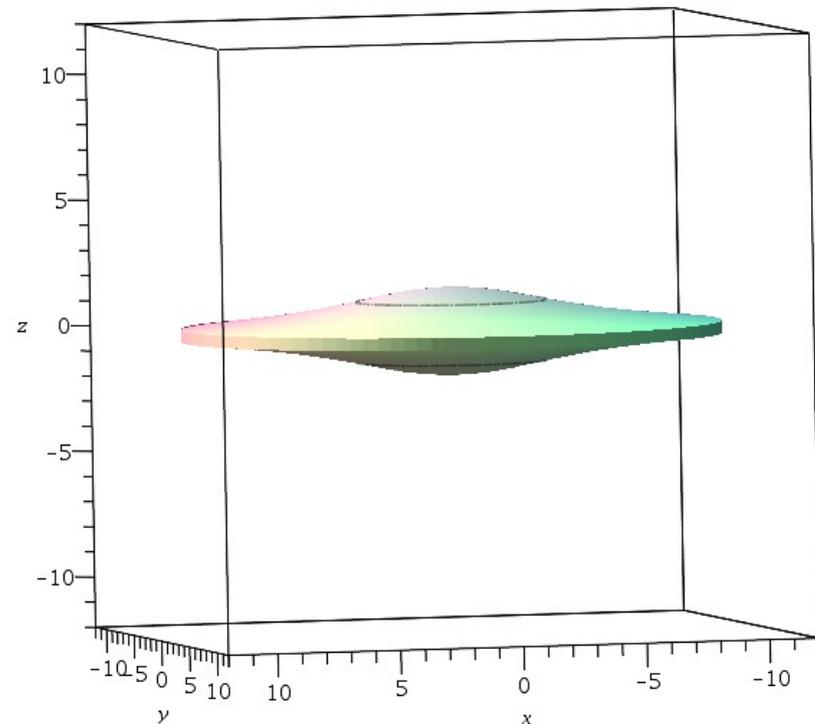
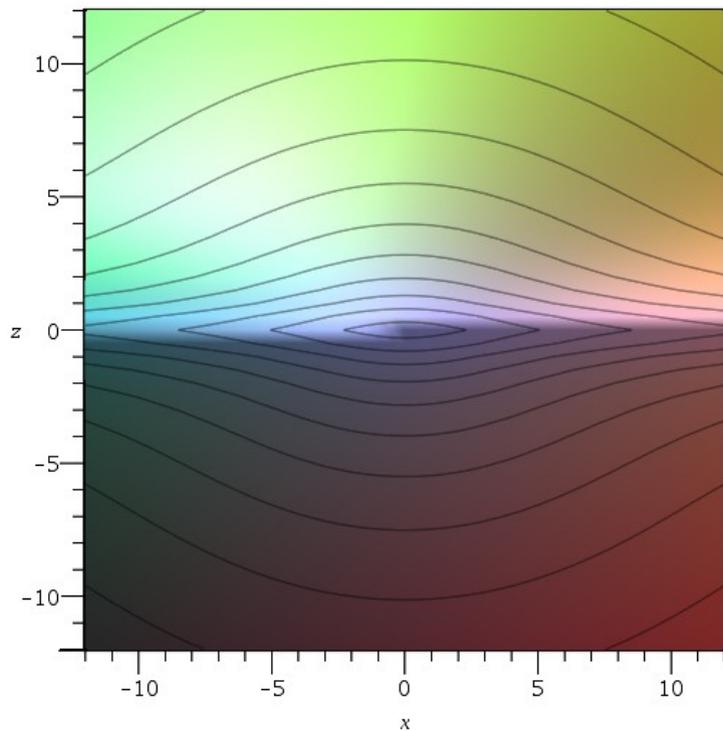
$$\frac{v_c^2}{R} = a = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}(R, z=0)$$

⇒

$$v_c(R) = \sqrt{-R \frac{\partial \Phi}{\partial R}(R, z=0)}$$

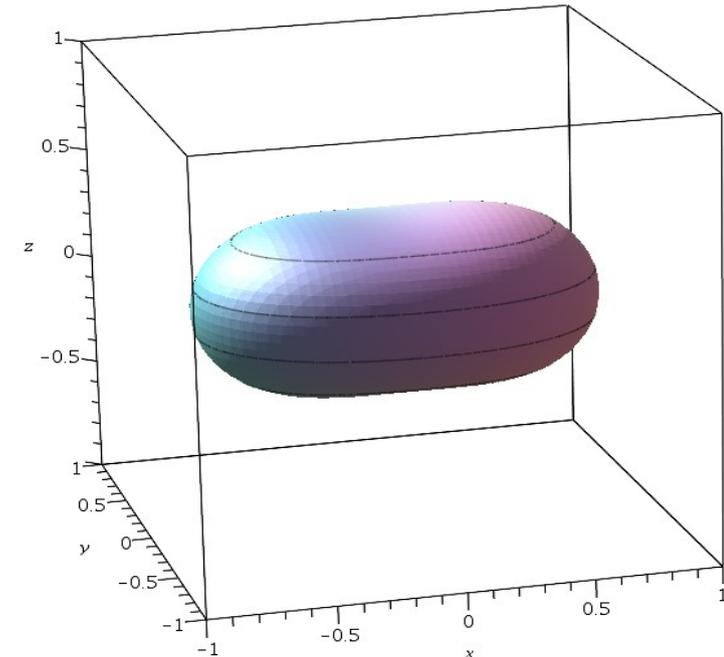
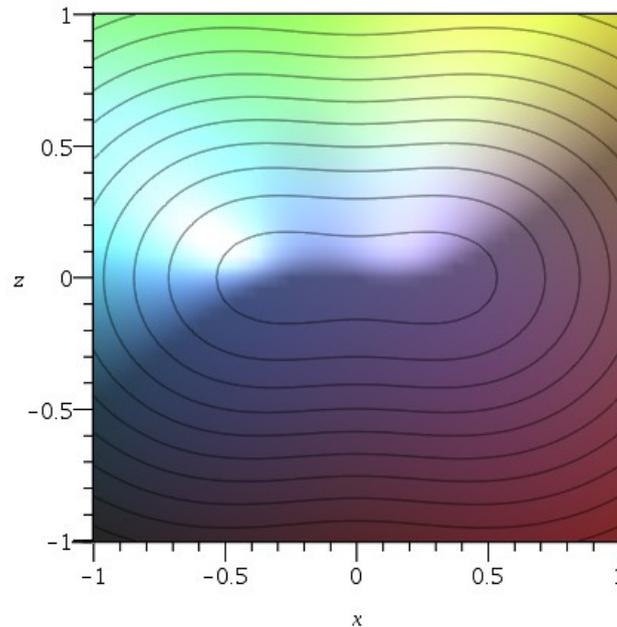
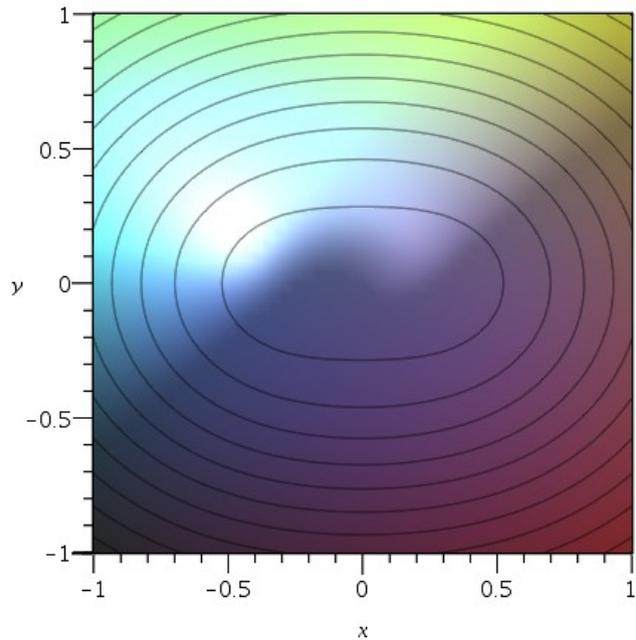
Exemples de densité de disque (Miyamoto-Nagai)

$$\Phi(R, z) = \frac{-GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{b^2 + z^2})^2}}$$



Exemples de densité de barre « cacahuète »

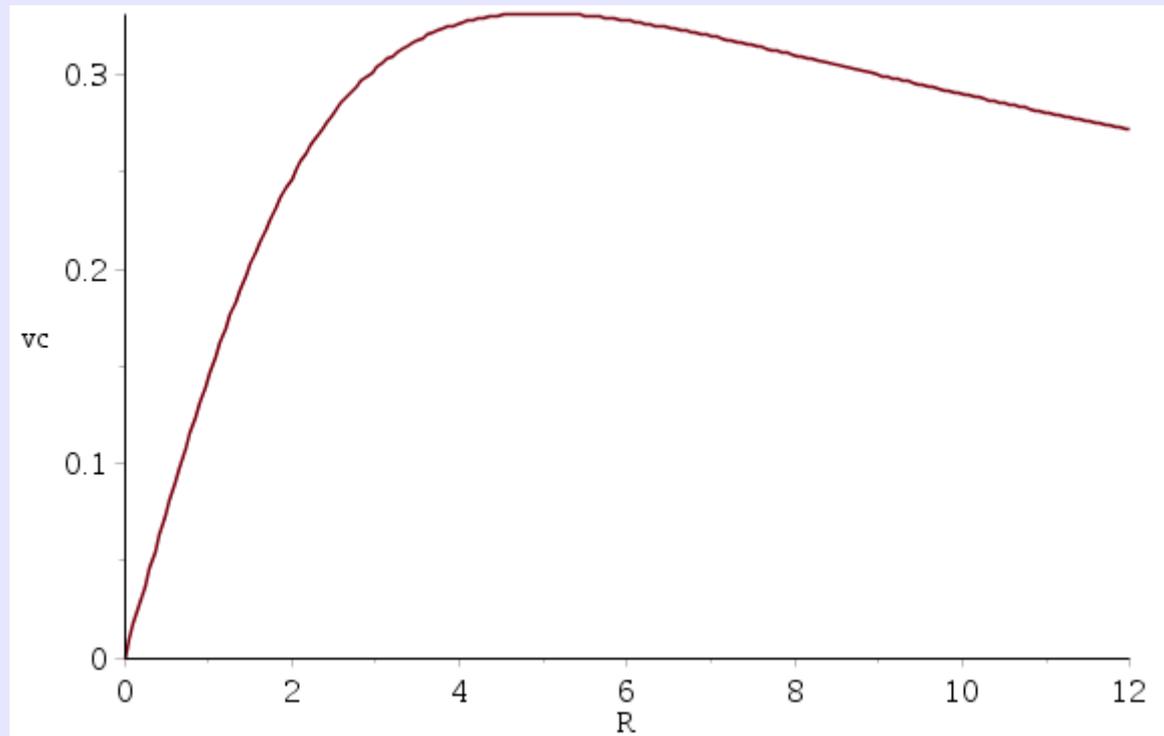
$$\Phi(x, y, z) = \frac{-GM}{\sqrt{A^2 + \frac{x^2}{1 + \frac{a^2}{A^2 + r^2}} + \frac{y^2}{1 + \frac{b^2}{A^2 + r^2}} + \frac{z^2}{1 + \frac{c^2}{A^2 + r^2}}}}$$



Calcul de la courbe de rotation circulaire dans un disque

Accélération centrifuge = attraction

$$\frac{v_c^2}{R} = -a = \frac{\partial \Phi}{\partial R}(R, z=0) \Rightarrow v_c(R) = \sqrt{R \frac{\partial \Phi}{\partial R}(R, z=0)}$$



Calcul du mouvement

Newton : force = mass x accélération

Accélération = dérivée par rapport au temps de la vitesse

Vitesse = dérivée par rapport au temps de la position

$$\begin{aligned}\frac{d x}{d t} &= v_x , & \frac{d v_x}{d t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} , \\ \frac{d y}{d t} &= v_y , & \frac{d v_y}{d t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} , \\ \frac{d z}{d t} &= v_z , & \frac{d v_z}{d t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} .\end{aligned}$$

Système de 6 équations différentielles ordinaires du 1^{er} ordre

Calcul du mouvement en coordonnées tournantes

En coordonnées tournantes autour de l'axe z on doit introduire les forces de **Coriolis** et **centrifuge**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x, & \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\Omega v_y + \Omega^2 x, \\ \frac{dy}{dt} &= v_y, & \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - 2\Omega v_x + \Omega^2 y, \\ \frac{dz}{dt} &= v_z, & \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Expériences numériques

Idée :

- développer l'intuition du mouvement des étoiles dans des potentiels de plus en plus réaliste
 - Point masse
 - Bulbe = masse concentrée mais étendue et sphérique
 - Disque
 - Disque + bulbe
 - Disque + bulbe + barre non tournante
 - (Disque + bulbe + barre tournante)
- Dans chaque cas on peut explorer différentes conditions initiales, avec une orbite de type soleil comme exemple de base, ou des orbites presque radiales au centre, ou perpendiculaires au plan galactique

Orbits around corotation in barred galaxies (Ollé & P98)

Periodic orbit families
starting around L_1 or L_4

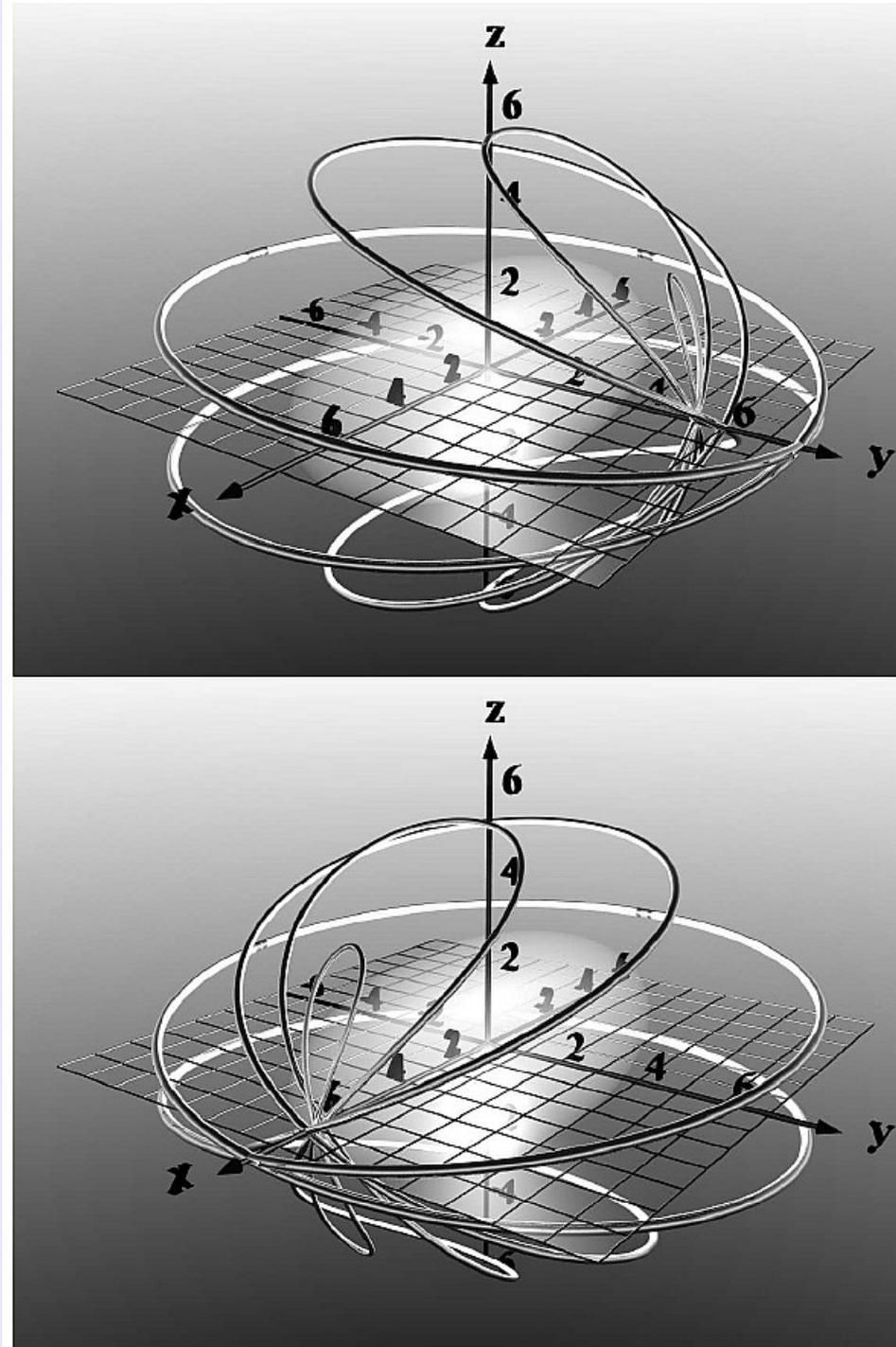


Fig. 3. Some members of the family of 3-D periodic orbits starting at $L_{4,5}$ (top) and $L_{1,2}$ (bottom) and ending on the nearly circular retrograde family in the galaxy plane at a period-doubling bifurcation. The tube thickness increases proportional to the Hamiltonian value h . The semi-transparent ellipsoid corresponds to the model Ferrer's bar

Conclusions

- Les orbites dans notre Galaxie ont servi de terrain d'entraînement pour populariser un savoir encore peu répandu (comment le système solaire et les étoiles en général se déplacent dans la Galaxie?)
- Il est beaucoup plus facile aujourd'hui de faire des expériences numériques et développer :
 - L'intuition pour des phénomènes trop compliqués pour être abordés avec les méthodes traditionnelles (crayon et papier)
 - La capacité à programmer des algorithmes même simples sans un bagage informatique prohibitif