

Cosmologie: Du vide à l'énergie noire.

Alain Blanchard



Fleurance, 8 Août



Introduction

Cosmologie physique

Théorie des observations dans une métrique de RW

Redshift et distances

Dynamique et Solutions

Vers les equations EFL

Solutions

Cosmologie Physique

Principes simples

+

Lois physiques

Cosmologie Physique

Principes simples

+

Lois physiques

- ▶ Représentation cohérente

Cosmologie Physique

Principes simples

+

Lois physiques

- ▶ Représentation cohérente
- ▶ Prédictions

Cosmologie Physique

Principes simples

+

Lois physiques

- ▶ Représentation cohérente
- ▶ Prédictions
- ▶ Tests/validation par les observations

Cosmologie Physique

Principes simples

+

Lois physiques

- ▶ Représentation cohérente
- ▶ Prédictions
- ▶ Tests/validation par les observations

La Cosmologie est une science mature.

Ciel & Espace, Mai 2013, page 7

Homogénéité

“L'univers est homogène aux grandes échelles”

Principe cosmologique d'Einstein

Homogénéité

“L'univers est homogène aux grandes échelles”

Principe cosmologique d'Einstein

Peut (et doit) être testé par les observations.

Homogénéité

“L'univers est homogène aux grandes échelles”

Principe cosmologique d'Einstein

Peut (et doit) être testé par les observations.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \bar{\rho}(R) = cste$$

(nécessaire mais pas suffisant...)

Homogénéité

“L'univers est homogène aux grandes échelles”

Principe cosmologique d'Einstein

Peut (et doit) être testé par les observations.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \bar{\rho}(R) = cste$$

(nécessaire mais pas suffisant...)

Isotropie

+ Principe de Copernic \Rightarrow homogénéité

Géométrie de l'espace-temps

Géométrie de l'espace-temps

- ▶ Un évènement est spécifié par quatre coordonnées (x, y, z, t)

Géométrie de l'espace-temps

- ▶ Un évènement est spécifié par quatre coordonnées (x, y, z, t)
- ▶ Ceci ne préjuge pas de la “forme” locale et globale de l'espace : Plan ? Sphère ? Tore ?

Géométrie de l'espace-temps

- ▶ Un évènement est spécifié par quatre coordonnées (x, y, z, t)
- ▶ Ceci ne préjuge pas de la "forme" locale et globale de l'espace : Plan ? Sphère ? Tore ?

Espace 3D Sphérique : partons d'un espace 4D (x, y, z, u)

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$$

Géométrie de l'espace-temps

- ▶ Un évènement est spécifié par quatre coordonnées (x, y, z, t)
- ▶ Ceci ne préjuge pas de la "forme" locale et globale de l'espace : Plan ? Sphère ? Tore ?

Espace 3D Sphérique : partons d'un espace 4D (x, y, z, u)

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$$

en coordonnées sphériques $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

En partant de $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$ et avec $u^2 = R^2 - r^2$
on obtient :

Géométrie de l'espace-temps

- ▶ Un évènement est spécifié par quatre coordonnées (x, y, z, t)
- ▶ Ceci ne préjuge pas de la "forme" locale et globale de l'espace : Plan ? Sphère ? Tore ?

Espace 3D Sphérique : partons d'un espace 4D (x, y, z, u)

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$$

en coordonnées sphériques $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

En partant de $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$ et avec $u^2 = R^2 - r^2$ on obtient :

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

Géométrie de l'espace

Géométrie de l'espace

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \text{ (sphérique)}$$
$$+ dr^2 \text{ (plat)}$$
$$+ \frac{dr^2}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \text{ (hyperbolique)}$$

Géométrie de l'espace

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \text{ (sphérique)}$$
$$+ dr^2 \text{ (plat)}$$
$$+ \frac{dr^2}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \text{ (hyperbolique)}$$

Élément de métrique de Robertson-Walker : $r \rightarrow \frac{r}{R}$

Géométrie de l'espace

$$\begin{aligned}
 dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) &+ \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \text{ (sphérique)} \\
 &+ dr^2 \text{ (plat)} \\
 &+ \frac{dr^2}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \text{ (hyperbolique)}
 \end{aligned}$$

Élément de métrique de Robertson-Walker : $r \rightarrow \frac{r}{R}$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R(t)^2 \left[r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right]$$

avec $k = -1, 0, +1$ selon la géométrie.

Métrie

Métrique

Métrique de Robertson-Walker : $r = rR_0$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{dr^2}{1 - Kr^2}]$$

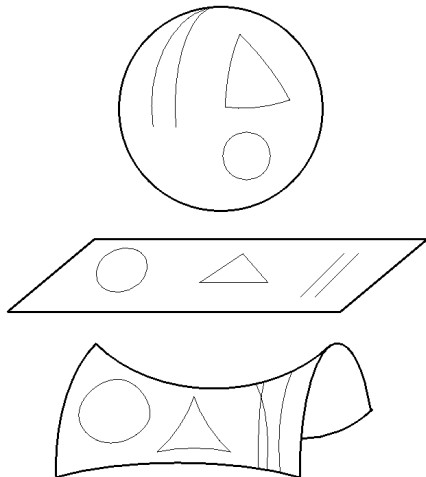
avec $K = \frac{k}{R_0^2}$ et $a(t_0) = 1$.

Géométries

Trois géométries (locales) possibles:

Géométries

Trois géométries (locales) possibles:



Topologie

La géométrie locale de l'espace (selon la valeur de k) ne détermine pas sa structure globale, c'est-à-dire sa topologie.

Topologie

La géométrie locale de l'espace (selon la valeur de k) ne détermine pas sa structure globale, c'est-à-dire sa topologie.

-> L'univers (homogène) est toujours fini avec $k = +1$.

Topologie

La géométrie locale de l'espace (selon la valeur de k) ne détermine pas sa structure globale, c'est-à-dire sa topologie.

-> L'univers (homogène) est toujours fini avec $k = +1$.

-> L'univers peut être fini ou infini si $k = 0, -1$.

Principe de base

Trajectoires des photons = géodésiques nulles:

Principe de base

Trajectoires des photons = géodésiques nulles:

$$ds^2 = 0$$

Principe de base

Trajectoires des photons = géodésiques nulles:

$$ds^2 = 0$$

Observateur à $(r = 0, \theta, \phi, t = t_0)$

Source lumineuse à $(r_S, \theta = 0, \phi = 0, t_S)$

$r(t)$ est la trajectoire du photon émis.

Principe de base

Trajectoires des photons = géodésiques nulles:

$$ds^2 = 0$$

Observateur à $(r = 0, \theta, \phi, t = t_0)$

Source lumineuse à $(r_S, \theta = 0, \phi = 0, t_S)$

$r(t)$ est la trajectoire du photon émis. Cette trajectoire est une géodésique nulle donc :

$$c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0$$

i.e.

Principe de base

Trajectoires des photons = géodésiques nulles:

$$ds^2 = 0$$

Observateur à $(r = 0, \theta, \phi, t = t_0)$

Source lumineuse à $(r_S, \theta = 0, \phi = 0, t_S)$

$r(t)$ est la trajectoire du photon émis. Cette trajectoire est une géodésique nulle donc :

$$c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0$$

i.e.

$$\frac{cdt}{R(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Relation de Mattig relation Généralisée

relation $r_S - t_S$

Relation de Mattig relation Généralisée

relation $r_S - t_S$

$$\int_{t_S}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^{r_S} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = S_k^{-1}(r_S)$$

avec :

$$S_k(r_S) = \begin{cases} \sin(r_S) & \text{si } k = +1 \\ r_S & \text{si } k = 0 \\ \sinh(r_S) & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

Relation de Mattig relation Généralisée

relation $r_S - t_S$

$$\int_{t_S}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^{r_S} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = S_k^{-1}(r_S)$$

avec :

$$S_k(r_S) = \begin{cases} \sin(r_S) & \text{si } k = +1 \\ r_S & \text{si } k = 0 \\ \sinh(r_S) & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

Quand les distances sont petites devant R_0 on a :

$$S_k^{-1}(r) \sim r \text{ and } t.d.g. \sim \frac{c\delta t}{R(t_0)} \equiv \frac{D}{R(t_0)}$$

Redshift

Une source émettant à la fréquence ν_S est vue à la fréquence ν_0

Redshift

Une source émettant à la fréquence ν_S est vue à la fréquence ν_0

On considère deux trajectoires de rayon lumineux émis au temps t_S et au temps $t_S + \frac{1}{\nu_S}$ vu au temps t_0 et au temps $t_0 + \frac{1}{\nu_0}$

Redshift

Une source émettant à la fréquence ν_S est vue à la fréquence ν_0

On considère deux trajectoires de rayon lumineux émis au temps t_S et au temps $t_S + \frac{1}{\nu_S}$ vu au temps t_0 et au temps $t_0 + \frac{1}{\nu_0}$

La coordonnée comovante r_S de la source reste constante soit :

$$S_k^{-1}(r_S) = \int_{t_S}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_S+1/\nu_S}^{t_0+1/\nu_0} \frac{cdt}{R(t)}$$

Redshift (2)

soit:

$$\frac{c}{R(t_0)} \frac{1}{\nu_0} - \frac{c}{R(t_S)} \frac{1}{\nu_S} = 0$$

ce qui donne le *redshift* z :

$$1 + z = \frac{\nu_S}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = \frac{R_0}{R_S}$$

Redshift (2)

soit:

$$\frac{c}{R(t_0)} \frac{1}{\nu_0} - \frac{c}{R(t_S)} \frac{1}{\nu_S} = 0$$

ce qui donne le *redshift* z :

$$1 + z = \frac{\nu_S}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = \frac{R_0}{R_S}$$

Interprétation?

Redshift (2)

soit:

$$\frac{c}{R(t_0)} \frac{1}{\nu_0} - \frac{c}{R(t_S)} \frac{1}{\nu_S} = 0$$

ce qui donne le *redshift* z :

$$1 + z = \frac{\nu_S}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = \frac{R_0}{R_S}$$

Interprétation?

Doppler-Fizeau?

Redshift (2)

soit:

$$\frac{c}{R(t_0)} \frac{1}{\nu_0} - \frac{c}{R(t_S)} \frac{1}{\nu_S} = 0$$

ce qui donne le *redshift* z :

$$1 + z = \frac{\nu_S}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = \frac{R_0}{R_S}$$

Interprétation?

Doppler-Fizeau?

Gravitationnel?

Redshift (2)

soit:

$$\frac{c}{R(t_0)} \frac{1}{\nu_0} - \frac{c}{R(t_S)} \frac{1}{\nu_S} = 0$$

ce qui donne le *redshift* z :

$$1 + z = \frac{\nu_S}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = \frac{R_0}{R_S}$$

Interprétation?

Doppler-Fizeau?

Gravitationnel?

(Ce n'est pas pareil!)

Redshift (3)

Si la “distance” change au cours du temps:

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

et si :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \text{ (first order)}$$

c'est un effet Doppler-Fizeau.

La distance propre

Distance obtenue à partir de la mesure faite avec des règles:

$$dl^2 = ds^2 = R(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

ce qui donne la distance propre :

$$D = \int_0^S dl = R(t) S_k^{-1}(r_S)$$

La distance propre

Distance obtenue à partir de la mesure faite avec des règles:

$$dl^2 = ds^2 = R(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

ce qui donne la distance propre :

$$D = \int_0^S dl = R(t) S_k^{-1}(r_S)$$

Cette distance est variable au cours du temps:

$$\dot{D} = \dot{R} S_k^{-1}(r_S)$$

Loi de Hubble

La source s'éloigne à une vitesse:

$$v = \frac{\dot{R}}{R} D = HD$$

Loi de Hubble

La source s'éloigne à une vitesse:

$$v = \frac{\dot{R}}{R} D = HD$$

C'est la **loi de Hubble**.

Nature du Redshift

Le redshift produit par l'expansion:

$$\frac{\nu_0}{\nu_s} = \frac{R(t_S)}{R(t_0)} \sim \frac{R(t_0) + \dot{R}(t_S - t_0)}{R(t_0)}$$

Nature du Redshift

Le redshift produit par l'expansion:

$$\frac{\nu_0}{\nu_S} = \frac{R(t_S)}{R(t_0)} \sim \frac{R(t_0) + \dot{R}(t_S - t_0)}{R(t_0)}$$

Donc:

$$\frac{\nu_S - \nu_0}{\nu_S} = \frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\dot{R}}{R} \delta t = H \frac{D}{c} = \frac{v}{c}$$

Nature du Redshift

Le redshift produit par l'expansion:

$$\frac{\nu_0}{\nu_s} = \frac{R(t_S)}{R(t_0)} \sim \frac{R(t_0) + \dot{R}(t_S - t_0)}{R(t_0)}$$

Donc:

$$\frac{\nu_S - \nu_0}{\nu_s} = \frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\dot{R}}{R} \delta t = H \frac{D}{c} = \frac{v}{c}$$

c'est donc un effet **Doppler-Fizeau**.

Distances...

quand $r \ll 1$ l'espace peut être considéré comme plat
i.e. $R(t_s) \sim R(t_0)$ or

$$z \ll 1$$

Distances...

quand $r \ll 1$ l'espace peut être considéré comme plat
i.e. $R(t_s) \sim R(t_0)$ or

$$z \ll 1$$

quand $z \geq 1$ ceci n'est plus vrai.

Une "mesure de distance " nécessite la spécification du dispositif expérimental.

Distances...

quand $r \ll 1$ l'espace peut être considéré comme plat
i.e. $R(t_s) \sim R(t_0)$ or

$$z \ll 1$$

quand $z \geq 1$ ceci n'est plus vrai.

Une "mesure de distance " nécessite la spécification du dispositif expérimental.

Differents dispositifs peuvent fournir des réponses différentes.

Distances...

Distances...

- ▶ Distance angulaire : $\theta = \frac{d}{D}$

Distances...

- ▶ Distance angulaire : $\theta = \frac{d}{D}$
- ▶ Distance lumineuse : $l = \frac{L}{4\pi D^2}$

Distances...

- ▶ Distance angulaire : $\theta = \frac{d}{D}$
- ▶ Distance lumineuse : $l = \frac{L}{4\pi D^2}$
- ▶ Distance paralaxe: $\pi = \frac{R_T}{D}$

Distances...

- ▶ Distance angulaire : $\theta = \frac{d}{D}$
- ▶ Distance lumineuse : $l = \frac{L}{4\pi D^2}$
- ▶ Distance paralaxe: $\pi = \frac{R_T}{D}$
- ▶ ...

Distance Angulaire

Prenons une règle : de taille (transversale) d vue à l'époque t_S

Distance Angulaire

Prenons une règle : de taille (transversale) d vue à l'époque t_S

Observateur: $(r = 0, 0, 0, t = t_0)$

Distance Angulaire

Prenons une règle : de taille (transversale) d vue à l'époque t_S

Observateur: $(r = 0, 0, 0, t = t_0)$

règle : $(r_S, 0, 0, t_S)$ and $(r_S, \theta, 0, t_S)$

Distance Angulaire

Prenons une règle : de taille (transversale) d vue à l'époque t_S

Observateur: $(r = 0, 0, 0, t = t_0)$

règle : $(r_S, 0, 0, t_S)$ and $(r_S, \theta, 0, t_S)$

Longueur propre:

$$d^2 = ds^2 = R^2(t_S)r^2\theta^2$$

par définition: $\theta = \frac{d}{D_{\text{ang}}} = \frac{d}{R(t_S)r}$

d'où:

Distance Angulaire

Prenons une règle : de taille (transversale) d vue à l'époque t_S

Observateur: $(r = 0, 0, 0, t = t_0)$

règle : $(r_S, 0, 0, t_S)$ and $(r_S, \theta, 0, t_S)$

Longueur propre:

$$d^2 = ds^2 = R^2(t_S)r^2\theta^2$$

par définition: $\theta = \frac{d}{D_{\text{ang}}} = \frac{d}{R(t_S)r}$

d'où:

$$D_{\text{ang}} = R(t_S)r$$

Distance lumineuse

Télescope de diamètre $2d$ observe un point source de luminosité L
 2θ est l'angle du télescope *vu depuis la source*

$$d = R(t_0) r \theta$$

l : la luminosité apparente de la source

Distance lumineuse

Télescope de diamètre $2d$ observe un point source de luminosité L
 2θ est l'angle du télescope *vu depuis la source*

$$d = R(t_0) r \theta$$

l : la luminosité apparente de la source

$$l = L \frac{\pi \theta^2}{4\pi} \frac{1}{1+z} \frac{1}{1+z} \frac{1}{\pi d^2}$$

Distance lumineuse

Télescope de diamètre $2d$ observe un point source de luminosité L
 2θ est l'angle du télescope *vu depuis la source*

$$d = R(t_0) r \theta$$

I : la luminosité apparente de la source

$$I = L \frac{\pi\theta^2}{4\pi} \frac{1}{1+z} \frac{1}{1+z} \frac{1}{\pi d^2}$$

$$I = \frac{L}{4\pi(R(t_0) r)^2} \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{L}{4\pi D_{\text{lum}}^2}$$

Distance lumineuse

On obtient la distance lumineuse:

$$\begin{aligned} D_{\text{lum}} &= R(t_0) r (1+z) \\ &= R(t_S) r (1+z)^2 \\ &= D_{\text{ang}} (1+z)^2 \end{aligned}$$

Distance lumineuse

On obtient la distance lumineuse:

$$\begin{aligned}D_{\text{lum}} &= R(t_0) r (1 + z) \\ &= R(t_S) r (1 + z)^2 \\ &= D_{\text{ang}} (1 + z)^2\end{aligned}$$

Cette dernière relation est toujours vraie (en RG).

La gravitation

La gravitation

A partir de la RG d'Einstein's

La gravitation

A partir de la RG d'Einstein's

$$\blacktriangleright R_{ij} - 1/2g_{ij}R = 8\pi GT_{ij}$$

La gravitation

A partir de la RG d'Einstein's

▶ $R_{ij} - 1/2g_{ij}R = 8\pi GT_{ij}$

▶ référentiel au repos :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \rho & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{bmatrix}$$

La gravitation

A partir de la RG d'Einstein's

▶ $R_{ij} - 1/2g_{ij}R = 8\pi GT_{ij}$

▶ référentiel au repos :

▶ Source de la gravitation : $\rho + 3P/c^2$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \rho & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{bmatrix}$$

La gravitation

A partir de la RG d'Einstein's

▶ $R_{ij} - 1/2g_{ij}R = 8\pi GT_{ij}$

▶ référentiel au repos :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \rho & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{bmatrix}$$

▶ Source de la gravitation : $\rho + 3P/c^2$

▶ Théorème de Birkoff : analogue du théorème de Gauss

La gravitation

A partir de la RG d'Einstein's

▶ $R_{ij} - 1/2g_{ij}R = 8\pi GT_{ij}$

▶ référentiel au repos :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \rho & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{bmatrix}$$

▶ Source de la gravitation : $\rho + 3P/c^2$

▶ Théorème de Birkoff : analogue du théorème de Gauss

Pour une distribution à symétrie sphérique $\rho(r < R)$ détermine la solution $r < R$.

Dynamique à partir de Newton...

Dans une sphère de rayon a

$$\ddot{a} = g$$

Dynamique à partir de Newton...

Dans une sphère de rayon a

$$\ddot{a} = g$$

Source $\rho + 3P/c^2$:

$$\ddot{a} = -\frac{GM}{a^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P/c^2)a \quad (1)$$

Dynamique à partir de Newton...

Dans une sphère de rayon a

$$\ddot{a} = g$$

Source $\rho + 3P/c^2$:

$$\ddot{a} = -\frac{GM}{a^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P/c^2)a \quad (1)$$

Conservation de l'énergie

E_t Energie totale de la sphère :

$$\begin{aligned} d(E_t) &= d(\rho V c^2) = -P dV \\ &= c^2(V d\rho + \rho dV) = -P dV \end{aligned}$$

Dynamique à partir de Newton...

ce qui conduit à :

$$\dot{\rho} = -(\rho + P/c^2) \frac{\dot{V}}{V} = -3(\rho + P/c^2) \frac{\dot{a}}{a} \quad (2)$$

(1) et (2) permettent d'éliminer P :

Dynamique à partir de Newton...

ce qui conduit à :

$$\dot{\rho} = -(\rho + P/c^2) \frac{\dot{V}}{V} = -3(\rho + P/c^2) \frac{\dot{a}}{a} \quad (2)$$

(1) et (2) permettent d'éliminer P :

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P/c^2)a$$

Dynamique à partir de Newton...

ce qui conduit à :

$$\dot{\rho} = -(\rho + P/c^2) \frac{\dot{V}}{V} = -3(\rho + P/c^2) \frac{\dot{a}}{a} \quad (2)$$

(1) et (2) permettent d'éliminer P :

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P/c^2)a$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3\rho + 3P/c^2)a + 2\frac{4\pi G}{3}\rho a$$

Dynamique à partir de Newton...

ce qui conduit à :

$$\dot{\rho} = -(\rho + P/c^2) \frac{\dot{V}}{V} = -3(\rho + P/c^2) \frac{\dot{a}}{a} \quad (2)$$

(1) et (2) permettent d'éliminer P :

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P/c^2)a$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3\rho + 3P/c^2)a + 2\frac{4\pi G}{3}\rho a$$

$$\ddot{a} = +\frac{4\pi G}{3} \frac{a\dot{\rho}}{\dot{a}} a + 2\frac{4\pi G}{3}\rho a$$

Dynamique à partir de Newton...

multiplication par \dot{a} :

$$\ddot{a} \dot{a} = + \frac{4\pi G}{3} a^2 \dot{\rho} \dot{a} + \frac{8\pi G}{3} \rho a \dot{a}^2$$

Dynamique à partir de Newton...

multiplication par \dot{a} :

$$\ddot{a} = +\frac{4\pi G}{3} a^2 \dot{\rho} + \frac{8\pi G}{3} \rho a \dot{a}$$

$$(\dot{a}^2)' = \left(\frac{8\pi G a^2 \rho}{3} \right)'$$

Dynamique à partir de Newton...

multiplication par \dot{a} :

$$\ddot{a} = +\frac{4\pi G}{3} a^2 \dot{\rho} + \frac{8\pi G}{3} \rho a \dot{a}$$

$$(\dot{a}^2)' = \left(\frac{8\pi G a^2 \rho}{3} \right)'$$

ce qui donne :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G a^2 \rho}{3} + cste$$

Dynamique à partir de Newton...

multiplication par \dot{a} :

$$\dot{a}\ddot{a} = +\frac{4\pi G}{3}a^2\dot{\rho} + \frac{8\pi G}{3}\rho a\dot{a}$$

$$(\dot{a}^2)' = \left(\frac{8\pi G a^2 \rho}{3}\right)'$$

ce qui donne :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G a^2 \rho}{3} + cste$$

Pour $R(t)$:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2}$$

Équation d'état

Solution \rightarrow nécessite une équation d'état $F(\rho, P) = 0$

Équation d'état

Solution \rightarrow nécessite une équation d'état $F(\rho, P) = 0$

Notation : $P = w\rho(c = 1)$

Équation d'état

Solution \rightarrow nécessite une équation d'état $F(\rho, P) = 0$

Notation : $P = w\rho$ ($c = 1$)

La densité ρ s'écrit:

$$\rho = \sum_i \int \frac{E_i}{c^2} f(p_i) dp_i$$

Équation d'état

Solution \rightarrow nécessite une équation d'état $F(\rho, P) = 0$

Notation : $P = w\rho (c = 1)$

La densité ρ s'écrit:

$$\rho = \sum_i \int \frac{E_i}{c^2} f(p_i) dp_i$$

la pression P :

$$P = \sum_i \int \frac{1}{3} \frac{p_i^2}{E_i} f(p_i) dp_i$$

Équation d'état

Deux régimes:

Équation d'état

Deux régimes:

→ domination par la matière : $p \ll mc$ i.e. $P = 0$

$$\rho = \int m \text{ et } g \propto \rho$$

$$\dot{\rho} = -3\rho\dot{a}/a \text{ (} a \propto R \text{) donc :}$$

$$\rho a^3 = \text{cste}$$

Équation d'état

Deux régimes:

→ domination par la matière : $p \ll mc$ i.e. $P = 0$

$$\rho = \int m \text{ et } g \propto \rho$$

$$\dot{\rho} = -3\rho\dot{a}/a \text{ (} a \propto R \text{) donc :}$$

$$\rho a^3 = \text{cste}$$

→ Domination de la pression (radiation) :

$$p \gg mc \text{ so } \rho = \int p/c \dots \text{ et } P = \int 1/3 p c \dots$$

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2$$

$$\dot{\rho} = -4\rho\dot{a}/a \text{ soit :}$$

$$\rho a^4 = \text{cste}$$

Vide : thermodynamique

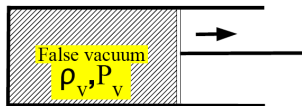
Vide : thermodynamique

Naivement : $\rho_v = 0$ et $P_v = 0...$

Vide : thermodynamique

Naivement : $\rho_v = 0$ et $P_v = 0...$

Soit un piston avec un vide interne:

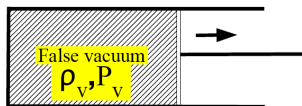


True vacuum
 $\rho = P = 0$

Vide : thermodynamique

Naivement : $\rho_v = 0$ et $P_v = 0...$

Soit un piston avec un vide interne:



True vacuum
 $\rho = P = 0$

Énergie interne totale:

$$E = mc^2 = \rho_v V c^2$$

Vide

Laissons le piston se déplacer ...

Vide

Laissons le piston se déplacer ...

$$d(E_t) = d(\rho_v V c^2) = \rho_v c^2 dV = -P_v dV$$

Vide

Laissons le piston se déplacer ...

$$d(E_t) = d(\rho_v V c^2) = \rho_v c^2 dV = -P_v dV$$

L'équation d'état du vide:

$$P_v = -\rho_v c^2$$

Vide

Laissons le piston se déplacer ...

$$d(E_t) = d(\rho_v V c^2) = \rho_v c^2 dV = -P_v dV$$

L'équation d'état du vide:

$$P_v = -\rho_v c^2$$

On peut ainsi introduire la constante cosmologique :

$$\Lambda = 8\pi G \rho_v$$

Vide : milieu invariant de Lorentz

La constante cosmologique se comporte exactement comme un milieu invariant de Lorentz

Vide : milieu invariant de Lorentz

La constante cosmologique se comporte exactement comme un milieu invariant de Lorentz \Rightarrow identification au vide. (Lemaître, 1934).

Vide : milieu invariant de Lorentz

La constante cosmologique se comporte exactement comme un milieu invariant de Lorentz \Rightarrow identification au vide. (Lemaître, 1934).

Transformation de Lorentz: Λ_j^i ($i, j = 0, 1, 2, 3$). Pour une translation uniforme le long de x ($i = 1$) à vitesse v :

Vide : milieu invariant de Lorentz

La constante cosmologique se comporte exactement comme un milieu invariant de Lorentz \Rightarrow identification au vide. (Lemaître, 1934).

Transformation de Lorentz: Λ_j^i ($i, j = 0, 1, 2, 3$). Pour une translation uniforme le long de x ($i = 1$) à vitesse v :

$$\Lambda_j^i = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & & \\ \gamma v & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ (convention $c = 1$).

Vide : milieu invariant de Lorentz

Soit le $T_{\mu\nu}$ d'un fluide parfait (ρ, P)

$$T'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^i \Lambda_{\nu}^j T_{ij}$$

On calcule T'_{00} c.-à-d.:

$$T'_{00} = \Lambda_0^i \Lambda_0^j T_{ij} = \gamma^2 \rho + \gamma^2 v^2 P$$

or T'_{00} dit être égal à ρ il faut donc :

$$P_v = -\rho_v c^2$$

Résumé

L'espace-temps est décrit par une métrique de RW

Résumé

L'espace-temps est décrit par une métrique de RW
Équations d'Einstein-Friedmann-Lemaître (EFL) :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Résumé

L'espace-temps est décrit par une métrique de RW
Équations d'Einstein-Friedmann-Lemaître (EFL) :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

et

$$\dot{\rho} = -3\left(\frac{P}{c^2} + \rho\right)\frac{\dot{R}}{R}$$

Résumé

L'espace-temps est décrit par une métrique de RW
 Equations d'Einstein-Friedmann-Lemaître (EFL) :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

et

$$\dot{\rho} = -3\left(\frac{P}{c^2} + \rho\right)\frac{\dot{R}}{R}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{8\pi G}{3}(\rho + 3P/c^2) + \frac{2\Lambda}{3}$$

Notations

Notations

$H = \frac{\dot{R}}{R}$, le paramètre de Hubble,

Notations

$H = \frac{\dot{R}}{R}$, le paramètre de Hubble,

$\Omega_M = \Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ le paramètre de densité,

Notations

$H = \frac{\dot{R}}{R}$, le paramètre de Hubble,

$\Omega_M = \Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ le paramètre de densité,

$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$, le paramètre de décélération,

Notations

$H = \frac{\dot{R}}{R}$, le paramètre de Hubble,

$\Omega_M = \Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ le paramètre de densité,

$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$, le paramètre de décélération,

$\Omega_{\text{vac}} = \Omega_\lambda = \lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$, la constante cosmologique réduite,

Notations

$H = \frac{\dot{R}}{R}$, le paramètre de Hubble,

$\Omega_M = \Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ le paramètre de densité,

$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$, le paramètre de décélération,

$\Omega_{\text{vac}} = \Omega_\lambda = \lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$, la constante cosmologique réduite,

$\Omega_c = -\alpha = -\frac{kc^2}{H^2 R^2}$, le paramètre de courbure.

Notations

$H = \frac{\dot{R}}{R}$, le paramètre de Hubble,

$\Omega_M = \Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ le paramètre de densité,

$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$, le paramètre de décélération,

$\Omega_{\text{vac}} = \Omega_\lambda = \lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$, la constante cosmologique réduite,

$\Omega_c = -\alpha = -\frac{kc^2}{H^2 R^2}$, le paramètre de courbure.

Grandeurs indicées 0 = valeurs actuelles : Ω_0, q_0, \dots

Notations

$H = \frac{\dot{R}}{R}$, le paramètre de Hubble,

$\Omega_M = \Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ le paramètre de densité,

$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$, le paramètre de décélération,

$\Omega_{\text{vac}} = \Omega_\lambda = \lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$, la constante cosmologique réduite,

$\Omega_c = -\alpha = -\frac{kc^2}{H^2 R^2}$, le paramètre de courbure.

Grandeurs indicées 0 = valeurs actuelles : Ω_0, q_0, \dots

E.F.L. :

$$\Omega_c + \Omega_M + \Omega_\lambda = 1$$

Domination par la matière

$$\ddot{a} = g = -\frac{GM}{a^2} \text{ and } \rho a^3 = \text{cste}$$

Domination par la matière

$$\ddot{a} = g = -\frac{GM}{a^2} \text{ and } \rho a^3 = \text{cste}$$

d'où:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho a^2}{3} = \dot{a}^2 - \frac{2GM}{a} = -k c^2$$

Domination par la matière

$$\ddot{a} = g = -\frac{GM}{a^2} \text{ and } \rho a^3 = \text{cste}$$

d'où:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho a^2}{3} = \dot{a}^2 - \frac{2GM}{a} = -k c^2$$

ce qui est exactement l'équation du mouvement d'une particule test dans le champ d'une masse (sphérique) en mécanique Newtonienne!

$$E_c + E_p = \text{cste}$$

Domination par la matière

$$\ddot{a} = g = -\frac{GM}{a^2} \text{ and } \rho a^3 = \text{cste}$$

d'où:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho a^2}{3} = \dot{a}^2 - \frac{2GM}{a} = -k c^2$$

ce qui est exactement l'équation du mouvement d'une particule test dans le champ d'une masse (sphérique) en mécanique Newtonienne!

$$E_c + E_p = \text{cste}$$

Solutions:

Domination par la matière

$$\ddot{a} = g = -\frac{GM}{a^2} \text{ and } \rho a^3 = \text{cste}$$

d'où:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho a^2}{3} = \dot{a}^2 - \frac{2GM}{a} = -k c^2$$

ce qui est exactement l'équation du mouvement d'une particule test dans le champ d'une masse (sphérique) en mécanique Newtonienne!

$$E_c + E_p = \text{cste}$$

Solutions:

- ▶ $k = -1$ solution hyperbolique

Domination par la matière

$$\ddot{a} = g = -\frac{GM}{a^2} \text{ and } \rho a^3 = \text{cste}$$

d'où:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho a^2}{3} = \dot{a}^2 - \frac{2GM}{a} = -k c^2$$

ce qui est exactement l'équation du mouvement d'une particule test dans le champ d'une masse (sphérique) en mécanique Newtonienne!

$$E_c + E_p = \text{cste}$$

Solutions:

- ▶ $k = -1$ solution hyperbolique
- ▶ $k = 0$ solution parabolique

Domination par la matière

$$\ddot{a} = g = -\frac{GM}{a^2} \text{ and } \rho a^3 = \text{cste}$$

d'où:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G \rho a^2}{3} = \dot{a}^2 - \frac{2GM}{a} = -k c^2$$

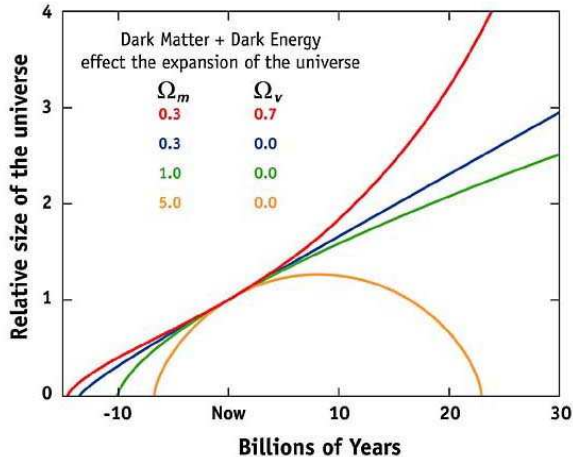
ce qui est exactement l'équation du mouvement d'une particule test dans le champ d'une masse (sphérique) en mécanique Newtonienne!

$$E_c + E_p = \text{cste}$$

Solutions:

- ▶ $k = -1$ solution hyperbolique
- ▶ $k = 0$ solution parabolique
- ▶ $k = +1$ solution (liée) elliptique

Solutions générales



MAP990350

Solution domination de la matière : cas $k = 0$ $\Lambda = 0$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho R^2}{3} \text{ and } \rho R^3 = \rho_0 R_0^3$$

Solution domination de la matière : cas $k = 0$ $\Lambda = 0$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho R^2}{3} \text{ and } \rho R^3 = \rho_0 R_0^3$$

D'après l'Eq. 1 :

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho}{3 H^2} = 1 = \Omega_0$$

d'où la densité critique :

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8\pi G}$$

Solution domination de la matière : cas $k = 0$ $\Lambda = 0$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho R^2}{3} \quad \text{and} \quad \rho R^3 = \rho_0 R_0^3$$

D'après l'Eq. 1 :

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho}{3 H^2} = 1 = \Omega_0$$

d'où la densité critique :

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8\pi G}$$

l'Eq. 2 implique:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3 R} = H_0^2 \frac{R_0^3}{R}$$

Solution domination de la matière : cas $k = 0$ $\Lambda = 0$

Solution:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3} = R_0 (t/t_0)^{2/3}$$

avec :

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6\pi G \rho_c}}$$

Solution domination de la matière : cas $k = 0$ $\Lambda = 0$

Solution:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3} = R_0 (t/t_0)^{2/3}$$

avec :

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6\pi G \rho_c}}$$

La solution passe par 0 c.-à-d. a une singularité dans le passé (fini)...

Singularité Initiale

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{8 \pi G}{3} (\rho + 3P/c^2)$$

et :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8 \pi G \rho}{3} - \frac{k c^2}{R^2}$$

Singularité Initiale

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{8 \pi G}{3} (\rho + 3P/c^2)$$

et :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8 \pi G \rho}{3} - \frac{k c^2}{R^2}$$

soit : $(\rho + 3P/c^2) > 0$ R passe par 0 (dans le passé) en un temps fini t_0 .

Singularité Initiale

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{8 \pi G}{3} (\rho + 3P/c^2)$$

et :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8 \pi G \rho}{3} - \frac{k c^2}{R^2}$$

soit : $(\rho + 3P/c^2) > 0$ R passe par 0 (dans le passé) en un temps fini t_0 .

Il y a un théorème général.

Singularité Initiale

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{8 \pi G}{3} (\rho + 3P/c^2)$$

et :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8 \pi G \rho}{3} - \frac{k c^2}{R^2}$$

soit : $(\rho + 3P/c^2) > 0$ R passe par 0 (dans le passé) en un temps fini t_0 .

Il y a un théorème général.

Quand $R \rightarrow 0$ on a $\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \sim \frac{8 \pi G \rho}{3}$ i.e. $\Omega \sim 1$

Comportement de Ω (matière et $\Lambda = 0$):

L'équation précédente $-\Omega_c = \Omega_0 - 1$ so :

$$H^2 = H_0^2[\Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0)(1+z)^2]$$

Comportement de Ω (matière et $\Lambda = 0$):

L'équation précédente $-\Omega_c = \Omega_0 - 1$ so :

$$H^2 = H_0^2[\Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0)(1+z)^2]$$

soit :

$$H^2 = H_0^2(1+z)^2(1+\Omega_0 z)$$

Comportement de Ω (matière et $\Lambda = 0$):

L'équation précédente $-\Omega_c = \Omega_0 - 1$ so :

$$H^2 = H_0^2[\Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0)(1+z)^2]$$

soit :

$$H^2 = H_0^2(1+z)^2(1+\Omega_0 z)$$

et :

$$\Omega(z) = \frac{8\pi G \rho}{3H^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \frac{(1+z)^3}{(1+z)^2(1+\Omega_0 z)}$$

Comportement de Ω (matière et $\Lambda = 0$):

L'équation précédente $-\Omega_c = \Omega_0 - 1$ so :

$$H^2 = H_0^2[\Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0)(1+z)^2]$$

soit :

$$H^2 = H_0^2(1+z)^2(1+\Omega_0 z)$$

et :

$$\Omega(z) = \frac{8\pi G \rho}{3H^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \frac{(1+z)^3}{(1+z)^2(1+\Omega_0 z)}$$

donc :

$$\Omega(z) = \Omega_0 \frac{(1+z)}{(1+\Omega_0 z)}$$

Relation de Mattig $\Lambda = 0$

le long d'un rayon lumineux :

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = \frac{c^2 dt^2}{R^2(t)} = \frac{c^2 dR^2}{R^2(t) \dot{R}^2(t)}$$

Relation de Mattig $\Lambda = 0$

le long d'un rayon lumineux :

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = \frac{c^2 dt^2}{R^2(t)} = \frac{c^2 dR^2}{R^2(t) \dot{R}^2(t)}$$

On en déduit $v = \frac{\alpha_0}{\Omega_0 R_0} R (\dots)$:

$$R_0 r = \frac{c}{H_0} \frac{2}{\Omega_0^2} \frac{\Omega_0(1+z) + 2 - 2\Omega_0 - (2 - \Omega_0)\sqrt{1 + \Omega_0 z}}{1+z}$$

Relation de Mattig $\Lambda = 0$

le long d'un rayon lumineux :

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = \frac{c^2 dt^2}{R^2(t)} = \frac{c^2 dR^2}{R^2(t) \dot{R}^2(t)}$$

On en déduit $v = \frac{\alpha_0}{\Omega_0 R_0} R (\dots)$:

$$R_0 r = \frac{c}{H_0} \frac{2}{\Omega_0^2} \frac{\Omega_0(1+z) + 2 - 2\Omega_0 - (2 - \Omega_0)\sqrt{1 + \Omega_0 z}}{1+z}$$

quand $z \ll 1$ $R_0 r \sim \frac{c}{H_0} z$

quand $z \gg 1$ $R_0 r \sim \frac{c}{H_0} \frac{2}{\Omega_0}$

Solution domination de la matière : cas $k = +1$ $\Lambda = 0$

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &= \frac{8\pi G \rho R^2}{3} - kc^2 \\ &= H_0^2 \Omega_0 R_0^2 (1+z) + (1 - \Omega_0) H_0^2 R_0^2\end{aligned}$$

Solution domination de la matière : cas $k = +1$ $\Lambda = 0$

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &= \frac{8\pi G \rho R^2}{3} - kc^2 \\ &= H_0^2 \Omega_0 R_0^2 (1+z) + (1 - \Omega_0) H_0^2 R_0^2\end{aligned}$$

donc quand $1+z \gg \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}$ on a : $R \propto t^{2/3}$

alors que $1+z \ll \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}$ $\dot{R} \sim cste$ on a $R \propto t$

Solution domination de la matière : cas $k = +1$ $\Lambda = 0$

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &= \frac{8\pi G \rho R^2}{3} - kc^2 \\ &= H_0^2 \Omega_0 R_0^2 (1+z) + (1 - \Omega_0) H_0^2 R_0^2\end{aligned}$$

donc quand $1+z \gg \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}$ on a : $R \propto t^{2/3}$

alors que $1+z \ll \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}$ $\dot{R} \sim cste$ on a $R \propto t$

$R(t)$ peut être développée:

$$\begin{aligned}H_0 t &= \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{3/2}} (\sinh(\psi) - \psi) \\ \frac{1}{1+z} &= \frac{R(t)}{R_0} = \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)} (\cosh(\psi) - 1)\end{aligned}$$

Ce qui permet d'exprimer $H_0 t(z)$ de façon analytique.

Solution domination de la matière : cas $k = +1$ $\Lambda = 0$

L'expression:

$$\dot{R}^2 = H_0^2 \Omega_0 R_0^2 (1+z) + (1 - \Omega_0) H_0^2 R_0^2$$

permet de trouver R_m avec $\dot{R} = 0$

$$R_m = R_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}$$

Solution domination de la matière : cas $k = +1$ $\Lambda = 0$

L'expression:

$$\dot{R}^2 = H_0^2 \Omega_0 R_0^2 (1+z) + (1 - \Omega_0) H_0^2 R_0^2$$

permet de trouver R_m avec $\dot{R} = 0$

$$R_m = R_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}$$

$R(t)$ peut aussi s'exprimer sous forme paramétrique:

$$H_0 t = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\phi - \sin(\phi))$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{R(t)}{R_0} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (1 - \cos(\phi))$$

Solution domination de la matière : cas $k = +1$ $\Lambda = 0$

Au maximum:

$$R_m = c \frac{2 t_m}{\pi}$$

$$\rho_m = \frac{3\pi}{32 G t_m^2}$$

$$t_m = \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \pi$$

(utile en formation des structures)

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

$$2\ddot{R} = -\frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)R + \frac{2\Lambda}{3}R$$

Si $\Lambda < 0$ force attractive

Si $\Lambda > 0$ force répulsive, dans ce cas $R(t)$ peut ne pas avoir de singularité $R = 0$.

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

$$2\ddot{R} = -\frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)R + \frac{2\Lambda}{3}R$$

Si $\Lambda < 0$ force attractive

Si $\Lambda > 0$ force répulsive, dans ce cas $R(t)$ peut ne pas avoir de singularité $R = 0$.

Cas $P = 0$

$$2\ddot{R} = H_0^2 R_0 \left[\frac{2\lambda_0}{(1+z)} - \Omega_0 (1+z)^2 \right]$$

$$\dot{R}^2 = H_0^2 R_0^2 \left[\frac{\lambda_0}{(1+z)^2} + (1 - \Omega_0 - \lambda_0) + \Omega_0 (1+z) \right]$$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

$$2\ddot{R} = -\frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)R + \frac{2\Lambda}{3}R$$

Si $\Lambda < 0$ force attractive

Si $\Lambda > 0$ force répulsive, dans ce cas $R(t)$ peut ne pas avoir de singularité $R = 0$.

Cas $P = 0$

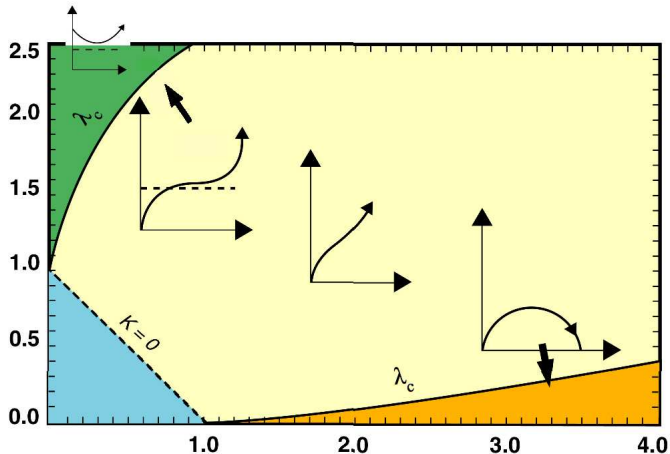
$$2\ddot{R} = H_0^2 R_0 \left[\frac{2\lambda_0}{(1+z)} - \Omega_0 (1+z)^2 \right]$$

$$\dot{R}^2 = H_0^2 R_0^2 \left[\frac{\lambda_0}{(1+z)^2} + (1 - \Omega_0 - \lambda_0) + \Omega_0 (1+z) \right]$$

posons $u = 1 + z$ on obtient :

$$\dot{R}^2 \propto \frac{\lambda_0}{u^2} + (1 - \Omega_0 - \lambda_0) + \Omega_0 u = f(u)$$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$



Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

Les relations $R_0 r$, $t(z)$, ... ne sont plus analytiques.

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

Les relations $R_0 r$, $t(z)$, ... ne sont plus analytiques.

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \frac{8 \pi G \rho R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda R^2}{3} \\ &= H_0^2 R_0^2 \left[\frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^2} - \Omega_c + \Omega_0(1+z) \right] \end{aligned}$$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

Les relations $R_0 r$, $t(z)$, ... ne sont plus analytiques.

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &= \frac{8 \pi G \rho R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda R^2}{3} \\ &= H_0^2 R_0^2 \left[\frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^2} - \Omega_c + \Omega_0(1+z) \right]\end{aligned}$$

Relation de Mattig :

$$S_k^{-1}(r) = \int_{t(z)}^{t_0} \frac{c dt}{R(t)} = |\Omega_c|^{1/2} \int_1^{1+z} \frac{d u}{(\Omega_0 u^3 - \Omega_c u^2 + \Omega_\Lambda)^{1/2}}$$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

Les relations $R_0 r$, $t(z)$, ... ne sont plus analytiques.

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &= \frac{8 \pi G \rho R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda R^2}{3} \\ &= H_0^2 R_0^2 \left[\frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^2} - \Omega_c + \Omega_0(1+z) \right]\end{aligned}$$

Relation de Mattig :

$$S_k^{-1}(r) = \int_{t(z)}^{t_0} \frac{c dt}{R(t)} = |\Omega_c|^{1/2} \int_1^{1+z} \frac{d u}{(\Omega_0 u^3 - \Omega_c u^2 + \Omega_\Lambda)^{1/2}}$$

Âge:

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

Les relations $R_0 r$, $t(z)$, ... ne sont plus analytiques.

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &= \frac{8 \pi G \rho R^2}{3} - kc^2 + \frac{\Lambda R^2}{3} \\ &= H_0^2 R_0^2 \left[\frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^2} - \Omega_c + \Omega_0(1+z) \right]\end{aligned}$$

Relation de Mattig :

$$S_k^{-1}(r) = \int_{t(z)}^{t_0} \frac{c dt}{R(t)} = |\Omega_c|^{1/2} \int_1^{1+z} \frac{du}{(\Omega_0 u^3 - \Omega_c u^2 + \Omega_\Lambda)^{1/2}}$$

Âge:

$$t_0 - t(z) = \int_1^{1+z} \frac{1}{H_0} \frac{du}{u(\Omega_0 u^3 - \Omega_c u^2 + \Omega_\Lambda)^{1/2}}$$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

- ▶ relation de Mattig : $R_0 r(z)$

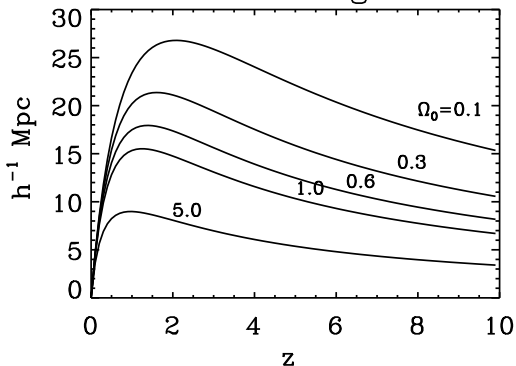
Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

- ▶ relation de Mattig : $R_0 r(z)$
- ▶ distance angulaire : $\theta = \frac{d}{D_{ang}(z)}$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

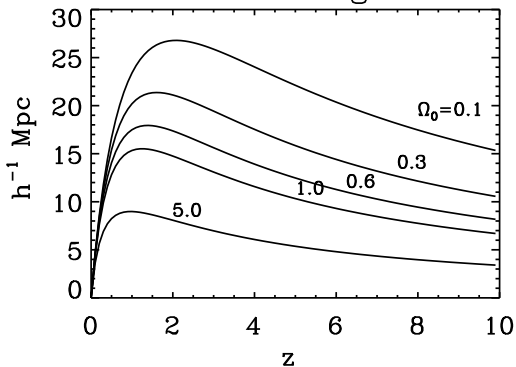
▶ relation de Mattig : $R_0 r(z)$

▶ distance angulaire : $\theta = \frac{d}{D_{ang}(z)}$
 $\theta = 1. \text{ deg}$



Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

- ▶ relation de Mattig : $R_0 r(z)$
 - ▶ distance angulaire : $\theta = \frac{d}{D_{ang}(z)}$
- $\theta = 1. \text{ deg}$



→ minimum à z puis augmente!

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

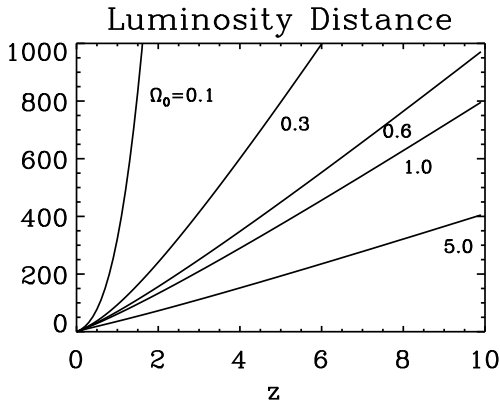
- ▶ relation de Mattig : $R_0 r(z)$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

- ▶ relation de Mattig : $R_0 r(z)$
- ▶ distance lumineuse :

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$

- ▶ relation de Mattig : $R_0 r(z)$
- ▶ distance lumineuse :



Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$: Applications

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$: Applications

- ▶ Temps écoulé (Look back time) : $H_0(t_0 - t(z))$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$: Applications

► Temps écoulé (Look back time) : $H_0(t_0 - t(z))$

→ at $z \sim 1$ l'univers est notablement plus jeune:

$$\Omega \sim 0. \quad \Omega_\Lambda = 0. \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.5 t_0$$

$$\Omega = 1. \quad \Omega_\Lambda = 0. \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.35 t_0$$

$$\Omega = 0.3 \quad \Omega_\Lambda = 0.7 \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.35 t_0$$

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$: Applications

- Temps écoulé (Look back time) : $H_0(t_0 - t(z))$

→ at $z \sim 1$ l'univers est notablement plus jeune:

$$\Omega \sim 0. \quad \Omega_\Lambda = 0. \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.5 \quad t_0$$

$$\Omega = 1. \quad \Omega_\Lambda = 0. \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.35 \quad t_0$$

$$\Omega = 0.3 \quad \Omega_\Lambda = 0.7 \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.35 \quad t_0$$

Les modèles avec $(\Omega, \Omega_\Lambda > 0)$ sont plus âgés $(\Omega, \Omega_\Lambda = 0)$, la différence est importante uniquement quand $\Omega_\Lambda \sim \lambda_c$.

Solution domination de la matière : cas $\Lambda \neq 0$:

Applications

- Temps écoulé (Look back time) : $H_0(t_0 - t(z))$

→ at $z \sim 1$ l'univers est notablement plus jeune:

$$\Omega \sim 0. \quad \Omega_\Lambda = 0. \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.5 \quad t_0$$

$$\Omega = 1. \quad \Omega_\Lambda = 0. \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.35 \quad t_0$$

$$\Omega = 0.3 \quad \Omega_\Lambda = 0.7 \quad z = 1 \leftrightarrow t_1 \sim 0.35 \quad t_0$$

Les modèles avec $(\Omega, \Omega_\Lambda > 0)$ sont plus âgés $(\Omega, \Omega_\Lambda = 0)$, la différence est importante uniquement quand $\Omega_\Lambda \sim \lambda_c$.

Calculateur Ned Wright :

<http://www.astro.ucla.edu/wright/CosmoCalc.html>

Solution Radiation dominante

$$P = \frac{1}{3} \rho_\gamma c^2 \quad \text{and} \quad \rho_\gamma R^4 = \text{cste}$$

Solution Radiation dominante

$$P = \frac{1}{3} \rho_\gamma c^2 \quad \text{and} \quad \rho_\gamma R^4 = \text{cste}$$

E.F.L. Equations:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8 \pi G}{3} (\rho_\gamma + \rho_m) - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\propto \frac{1}{R^4} \quad \frac{1}{R^3} \quad \frac{1}{R^2} \quad \text{cste}$$

Solution Radiation dominante

$$P = \frac{1}{3} \rho_\gamma c^2 \quad \text{and} \quad \rho_\gamma R^4 = \text{cste}$$

E.F.L. Equations:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8 \pi G}{3} (\rho_\gamma + \rho_m) - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\propto \frac{1}{R^4} \quad \frac{1}{R^3} \quad \frac{1}{R^2} \quad \text{cste}$$

→ Le terme de radiation est dominant à grand redshift: $\dot{R} = \frac{\text{cste}}{R}$

Solution Radiation dominante

$$P = \frac{1}{3} \rho_\gamma c^2 \quad \text{and} \quad \rho_\gamma R^4 = \text{cste}$$

E.F.L. Equations:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_\gamma + \rho_m) - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\propto \frac{1}{R^4} \quad \frac{1}{R^3} \quad \frac{1}{R^2} \quad \text{cste}$$

→ Le terme de radiation est dominant à grand redshift: $\dot{R} = \frac{\text{cste}}{R}$

Solution:

$$R = R_1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \quad \text{with} \quad \tau^2 = \frac{3}{32\pi G \rho_1}$$