Attraction et répulsion en mathématiques

Festival de Fleurance 2017

Marathon des Sciences

Jean-Pierre Marco

Plan

I. De la physique aux mathématiques :
espace des états et déterminisme

II. Attraction et répulsion pour les systèmes discrets
(objets fractals)

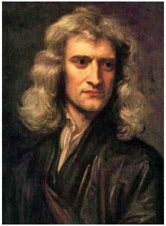
III. Attraction et répulsion pour les systèmes continus
(attracteurs étranges)

IV. Retour à la physique :
le déterminisme comme propriété d'attraction

I. De l’attraction en physique
à
l’attraction en mathématiques :
un changement d’espace

I.1 L'attraction en physique : une force

Johannes Kepler
(1571-1640)



Isaac Newton
(1643-1727)

Loi de la gravitation universelle :

Deux corps massifs dans l'espace s'attirent en raison de l'inverse du carré de leur distance.

I.2 Vers les mathématiques : le goût des modèles

Isaac Newton
mathématicien
en promenade...

...passe sous un pommier...

...et établit les équations différentielles
régissant l'évolution
de deux particules massives :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|^2}$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|^2}$$

Vers le *XVIII*^{è} siècle...

S'il n'y avait que des particules en interaction newtonienne...
l'univers serait-il déterministe ?

La donnée de la position et de la vitesse de toutes les particules de l'univers à un instant fixé détermine-t-elle complètement son évolution ?


Les bras m'en tombent

I.3 Un exemple plus intuitif :
la pomme (et encore la coccinelle)


$\vec{V} = \vec{0}$


$\vec{V}$


On avait dit
sans vitesse initiale !
On aura tout vu
dans ce festival...

La connaissance de la position à un instant donné
ne détermine pas le mouvement.

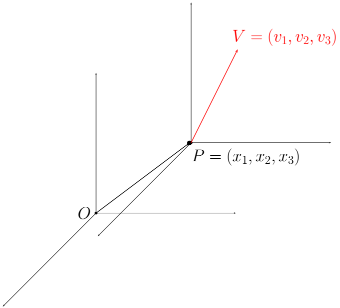
La question du déterminisme :
position et vitesse à un instant donné
déterminent-elles le mouvement ?

L'art de la pétanque...

I.4 États, espace des états, orbites

L'espace des états de la pomme

• État : paire $(P, V) \sim 6$ nombres



• Espace des états E :
ensemble de tous les états possibles (6 dimensions)

• Évolution de la pomme au cours du temps :
courbe d'évolution dans E : orbite

L'intérêt de l'espace des états E

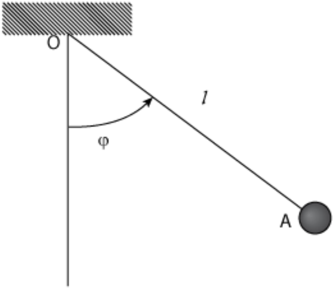
• Défini pour des systèmes physiques plus généraux.
E espace de dimension $6N$ pour N particules en interaction newtonienne.

• Théorème (déterminisme) :

Pour ces systèmes, par tout état il passe une orbite et une seule : l'état initial détermine l'évolution.

• Attraction et répulsion mathématiques se définissent dans l'espace des états, pas dans l'espace usuel.

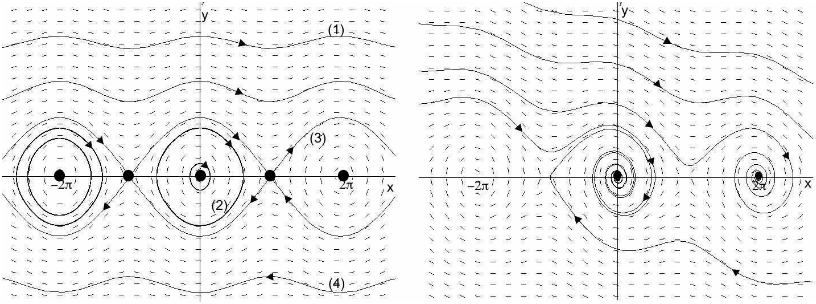
Un autre exemple : le pendule simple



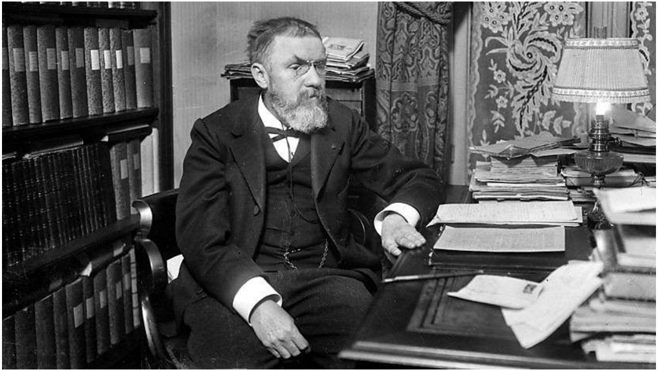
Espace des états et orbites

État : couple $(x = \varphi, y = \omega)$.

E de dimension 2 (plan).



Systèmes continus, systèmes discrets



Henri Poincaré (1854-1912)

Systèmes continus

Les états de la pomme, du pendule, des planètes, évoluent suivant un temps continu, modélisé par une droite idéalisée

La droite temporelle

Les orbites sont donc aussi des courbes continues

L'infini dénombrable : les nombres entiers

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	$\cdots$

Systèmes discrets (déterministes)

Il existe des systèmes dont on peut numéroter les états successifs : infini dénombrable.

Évolution de la balle : suite des rebonds successifs sur le bord de la table, régie par une *application* dans l'espace des états.

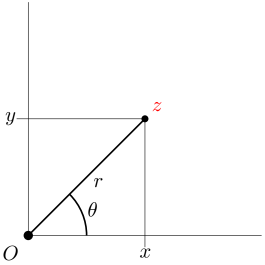
II. Attraction et répulsion pour des systèmes discrets

II.1 Applications du plan dans le plan

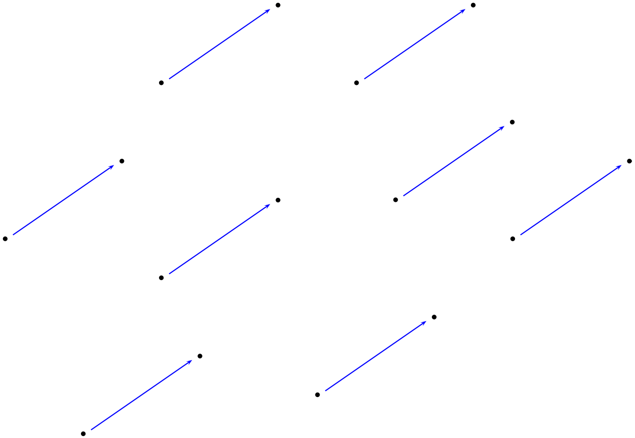
Les points du plan

Un point z du plan est repéré :

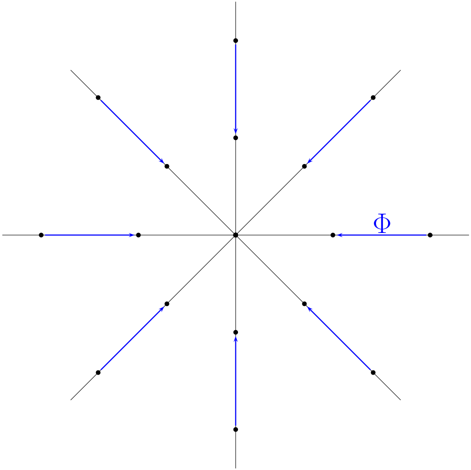
- soit par ses coordonnées (x, y),
- soit par une paire de nombres (r, θ) :
  r est le *module* de z, c'est la distance de z à O, et θ est l'*angle* de z.



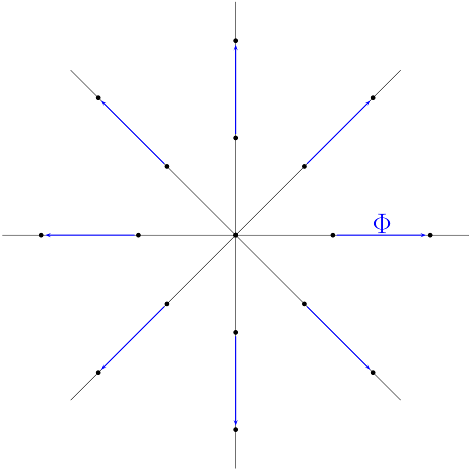
Une translation : $\Phi(z) = z + c$



Une homothétie : $\Phi(z) = \frac{1}{2}z$



L'homothétie inverse : $\Phi^{-1}(z) = 2z$



L'orbite d'un point suivant Φ

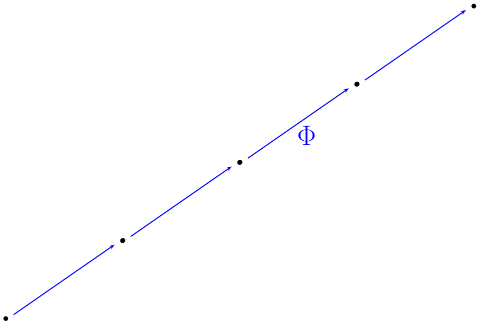
$$z_0 \longrightarrow z_1 = \Phi(z_0) \longrightarrow z_2 = \Phi(z_1) \longrightarrow z_3 = \Phi(z_2) \longrightarrow z_4 = \Phi(z_3) \cdots$$

L'*orbite du point z_0 suivant* Φ (dans le futur) est l'ensemble infini dénombrable ordonné de tous les points ainsi obtenus

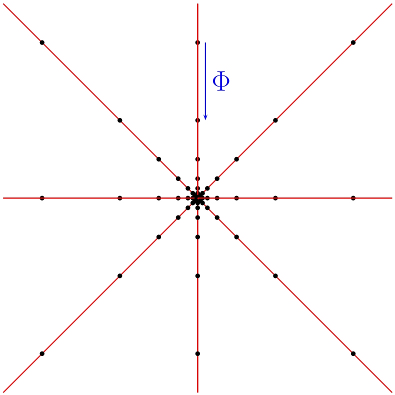
$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6,\ z_7,\ z_8,\ z_9,\ z_{10},\ z_{11},\ z_{12},\ z_{13},\ z_{14} \cdots$$

Point fixe : $\Phi(z) = z$.
Tous les points de l'orbite de z sont égaux à z.

Orbite pour la translation



Orbites pour l'homothétie $\Phi(z) = \frac{1}{2}z$

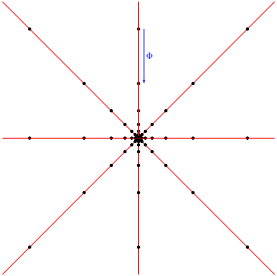


II.2 Attraction et répulsion

L'attraction suivant Φ

Un point z_0 est *attiré par un point fixe O* si la distance entre le point z_n et O tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Pour $\Phi(z) = \frac{1}{2}z$, tous les points sont attirés vers O.

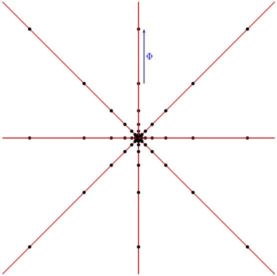


Mais il n'y a pas de force !

La répulsion suivant Φ

Un point z_0 est *repoussé par un point O suivant Φ* lorsqu'il est attiré par O suivant Φ^{-1} *c-a-d en revenant dans le passé*.

Pour $\Phi(z) = 2z$, tous les points sont repoussés par O.



II.3 Une application au cœur de l'histoire :

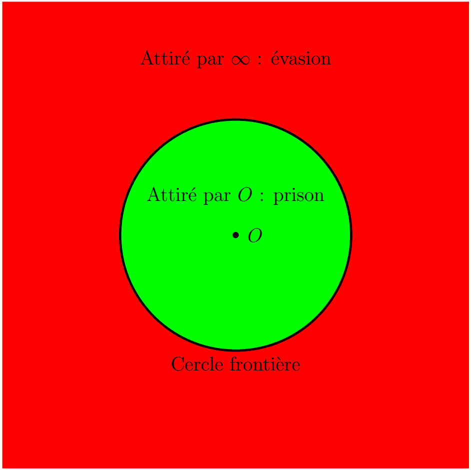
$$\Psi(z) = z^2 + c$$

Commençons par le début : $\Phi(z) = z^2$

$$\Phi(r, \theta) = (r^2, 2\theta)$$

Φ multiplie le module par lui-même et double l'angle.

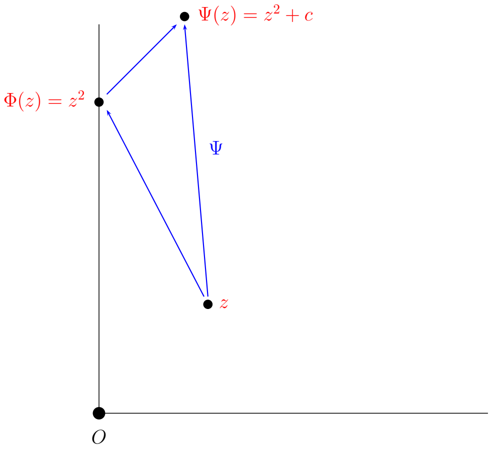
Les domaines d'attraction de Φ



Perturbons un peu...

$$\Psi(z) = z^2 + c$$

Pour passer de $\Phi(z)$ à $\Psi(z)$: on ajoute une simple constante c...



... et c'est beaucoup beaucoup plus compliqué !

Le troisième point de l'orbite de z suivant Φ s'écrit

$$z_3 = z^8$$

Le troisième point de l'orbite de z suivant Ψ s'écrit

$$z_3 = z^8 + 4cz^6 + (6c^2 + 2c)z^4 + 4(c^3 + c^2)z^2 + c^4 + 2c^3 + c^2 + c$$

... et c'est beaucoup beaucoup plus compliqué !

Le troisième point de l'orbite de z suivant Φ s'écrit

$$z_3 = z^8$$

Le troisième point de l'orbite de z suivant Ψ s'écrit

$$z_3 = z^8 + 4cz^6 + (6c^2 + 2c)z^4 + 4(c^3 + c^2)z^2 + c^4 + 2c^3 + c^2 + c$$

Les initiateurs

Pierre Fatou (1878-1929)

Gaston Julia (1893-1978)

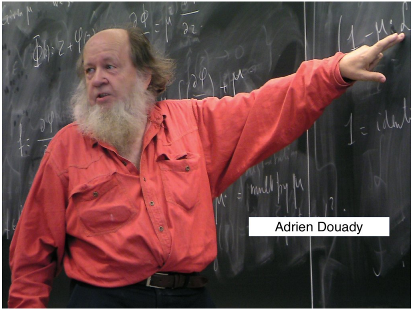
Benoît Mandelbrot (1924-2010)

On peut encore poser la question :

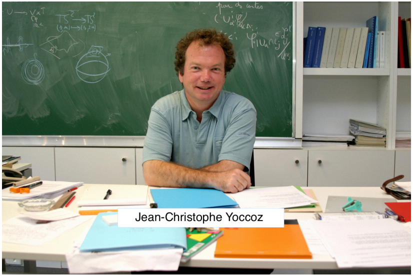
Ψ définit-elle une prison, et où son mur ?

On l'appelle *ensemble de Julia* de Ψ.

Deux grandes figures...

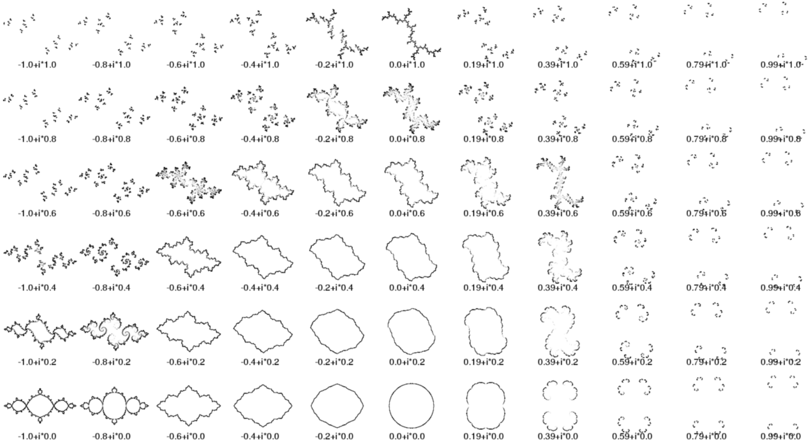


Adrien Douady

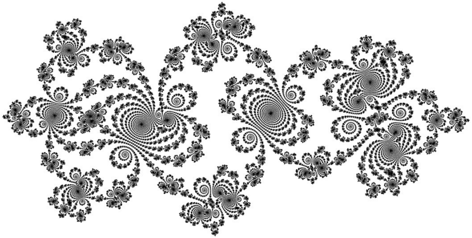


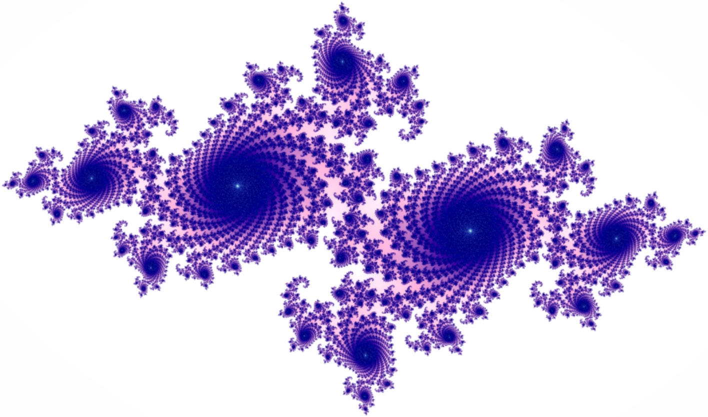
Jean-Christophe Yoccoz

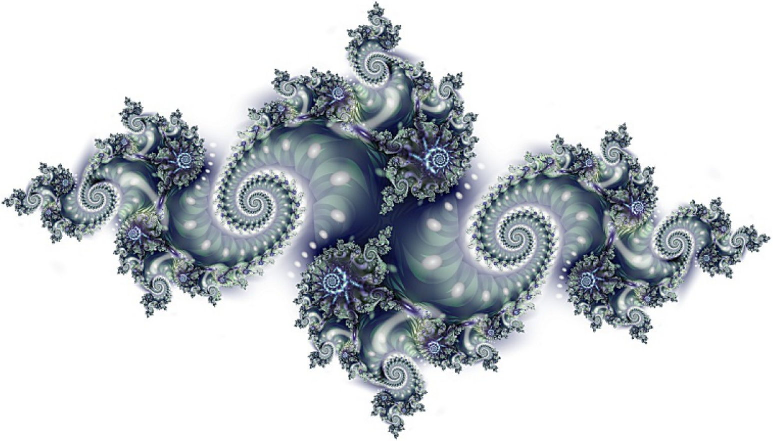
...et quelques ensembles de Julia lorsque c varie

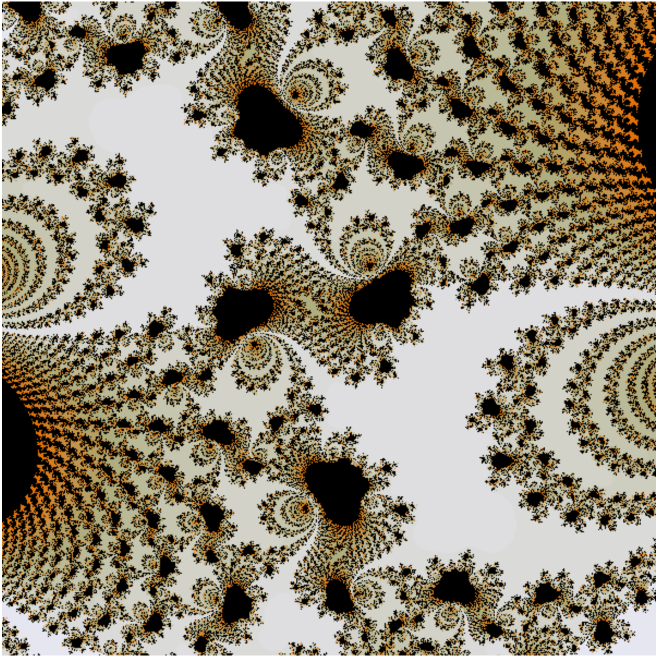


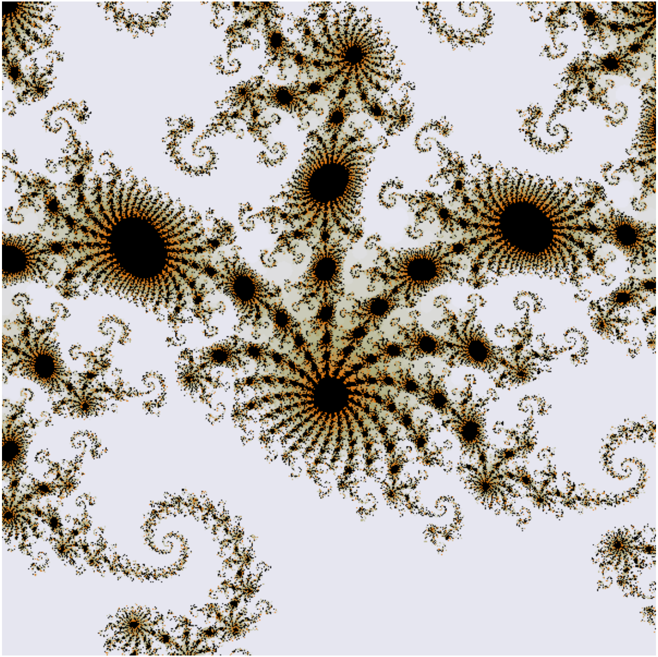
Une corne d'abondance d'objets extraordinaires







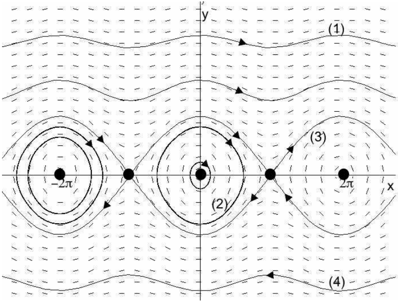


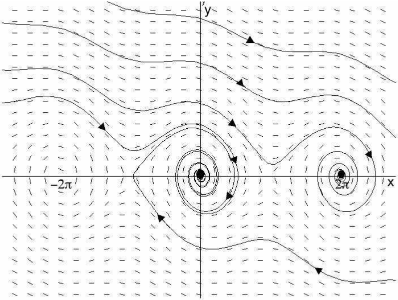


III Attraction et répulsion pour les systèmes continus

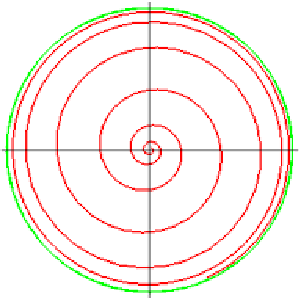
III.1 Attraction et répulsion par l'exemple

Le pendule simple

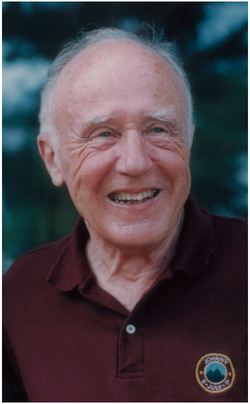




Attraction par un cercle invariant



III.2 L'attracteur de Lorenz et l'effet papillon



Edward Lorenz

Le système de Lorenz : évolution météorologique très simplifiée

• État $z = (u, v, w)$: paramètres soigneusement choisis...

• Espace des états E de dimension 3.

• Equation de Lorenz dans E

$$\frac{dz}{dt} = \Big(\sigma(v - u),\ \rho - v - uw,\ uv - \beta w\Big)$$

L'effet papillon

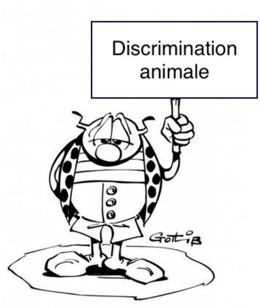
Étude numérique : extrême sensibilité aux conditions initiales.

Un battement d'aile de papillon au Brésil peut-il provoquer une tempête au Texas ?

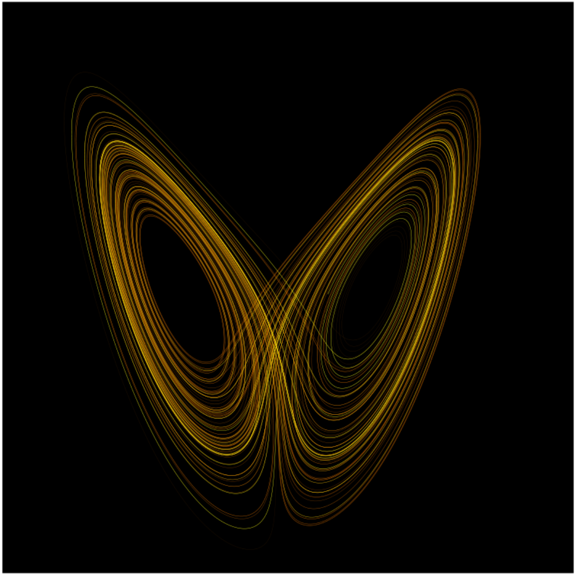
L'effet papillon

Étude numérique : extrême sensibilité aux conditions initiales.

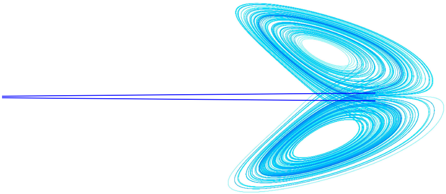
Un battement d'aile de papillon au Brésil peut-il provoquer une tempête au Texas ?



L'attracteur de Lorenz



Divergence des orbites voisines

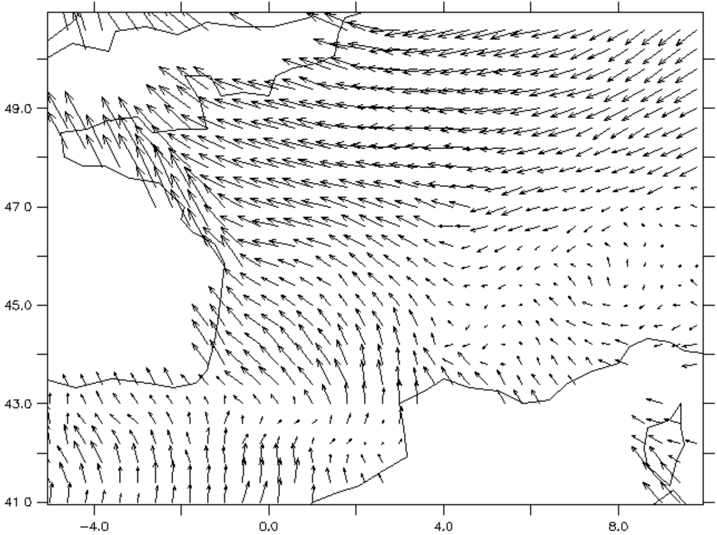


IV. Le déterminisme :
le vif du sujet

Équations différentielles

On va enfin en parler un peu...

Un exemple de champ de vecteurs : la vitesse du vent



Équations différentielles d'ordre 1 et champs de vecteurs

• Champ de vecteurs sur E : vecteur $V(z)$ en tout point z de E.

• Équation différentielle sur E :

$$\frac{dz(t)}{dt} = V(z) \qquad (Loi)$$

Interprétation

Un mobile se déplace dans E, avec GPS et tableau de bord qui donnent :

– sa position à l'instant t : $z(t)$ (GPS)

– la vitesse qui est imposée à l'endroit où il se trouve : $V(z)$ (GPS)

– sa vitesse : $\frac{dz(t)}{dt}$ (tableau de bord).

Le mobile suit l'équation (Loi) si à tout instant sa vitesse est égale à la vitesse imposée.

La question !

L'orbite du mobile est-elle déterminée
par le point de départ dans E ?

La réponse de Cauchy et Lipschitz :

Cauchy (1789-1857)

Lipschitz (1832-1903)

La réponse de Cauchy et Lipschitz :

Cauchy (1789-1857)

Lipschitz (1832-1903)

Oui

La réponse de Cauchy et Lipschitz :

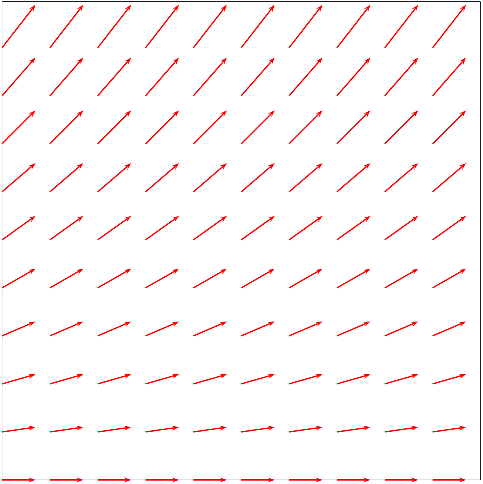
Cauchy (1789-1857)

Lipschitz (1832-1903)

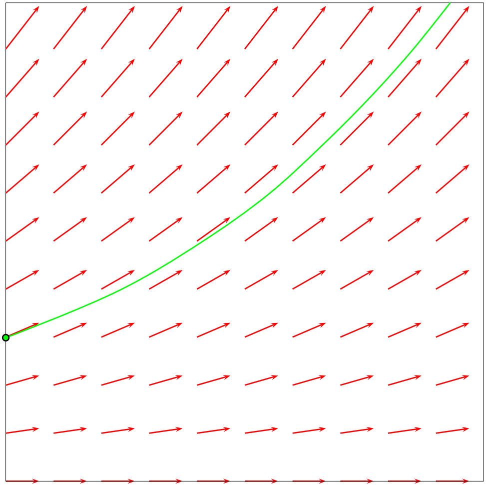
Oui

Par un point de E il passe une orbite et une seule.

Idée : du vent dans un champ...



...et on suit les feuilles



La vraie preuve : un peu de science-fiction et beaucoup d'attraction

On introduit le "superespace" $\mathcal{C}(E)$:
toutes les courbes de E qui passent par z_0 à l'instant t_0.

$\mathcal{C}(E)$ est un espace de dimension infinie !

La vraie preuve : un peu de science-fiction et beaucoup d'attraction

On introduit le "superespace" $\mathcal{C}(E)$:
toutes les courbes de E qui passent par z_0 à l'instant t_0.

$\mathcal{C}(E)$ est un espace de dimension infinie !

Une super application dans $\mathcal{C}(E)$

Il existe une application $\Phi : \mathcal{C}(E) \mapsto \mathcal{C}(E)$ telle que :

$\Phi(\gamma) = \gamma$ si et seulement si γ est une solution de (Loi)

Φ "rétrécit" les parties de $\mathcal{C}(E)$.

Une super application dans $\mathcal{C}(E)$

Il existe une application $\Phi : \mathcal{C}(E) \mapsto \mathcal{C}(E)$ telle que :

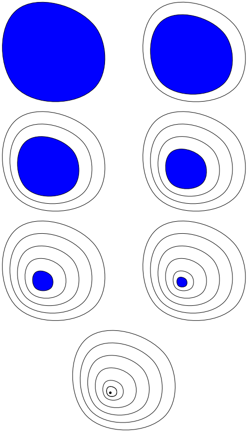
$\Phi(\gamma) = \gamma$ si et seulement si γ est une solution de (Loi)

Φ "rétrécit" les parties de $\mathcal{C}(E)$.

Pour ne pas la nommer :

$$\Phi(\gamma)(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\gamma(s)\big)\, ds$$

L'action de Φ en faveur du déterminisme



Tout le domaine est attiré sur un seul point Γ
qui vérifie $\Phi(\Gamma) = \Gamma$: la seule orbite qui passe par z_0 en t_0

Tous les systèmes physiques de l'exposé
sont régis par des équations différentielles d'ordre 1
dans leurs espaces des états.

Ils sont déterministes.