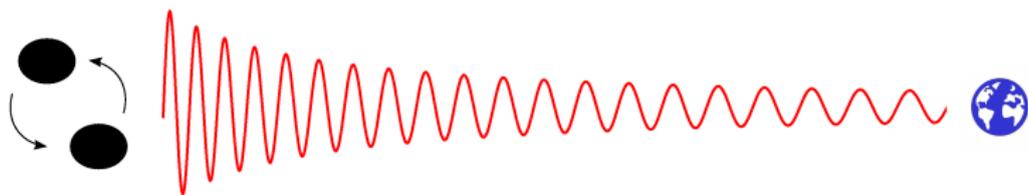
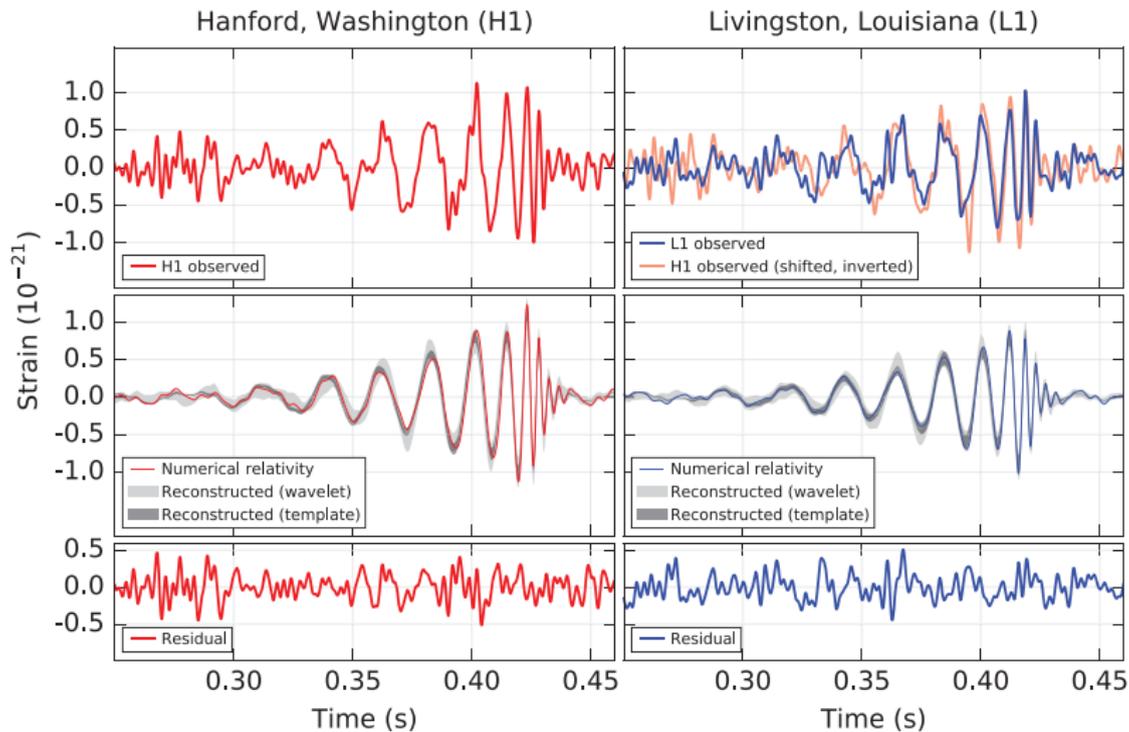


Anatomie d'une onde gravitationnelle

Alexandre Le Tiec

Laboratoire Univers et Théories
Observatoire de Paris / CNRS



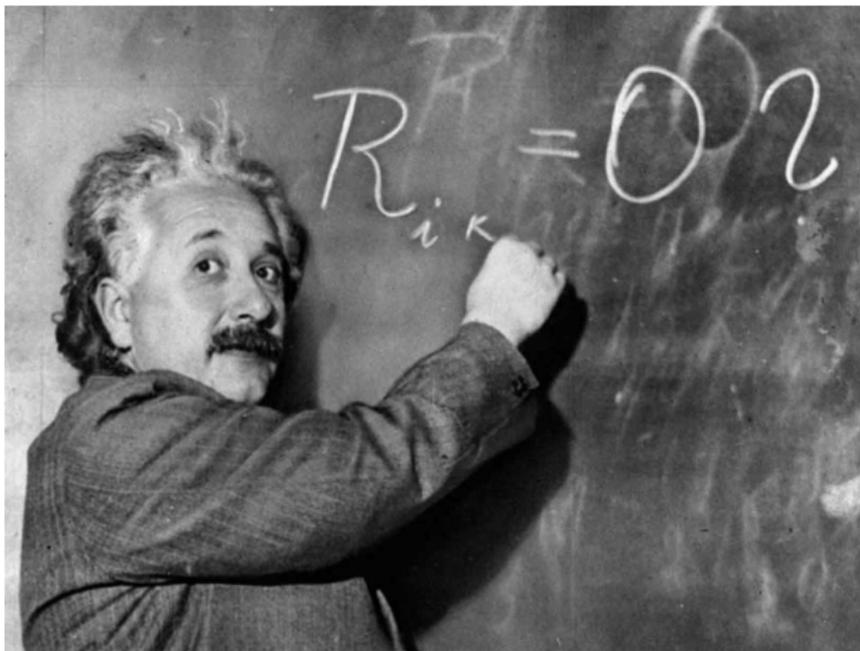


Plan du cours

- ① Espace, temps et gravitation
- ② Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- ③ Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle ?
- ④ Les sources d'ondes gravitationnelles
- ⑤ Anatomie de l'onde GW150914

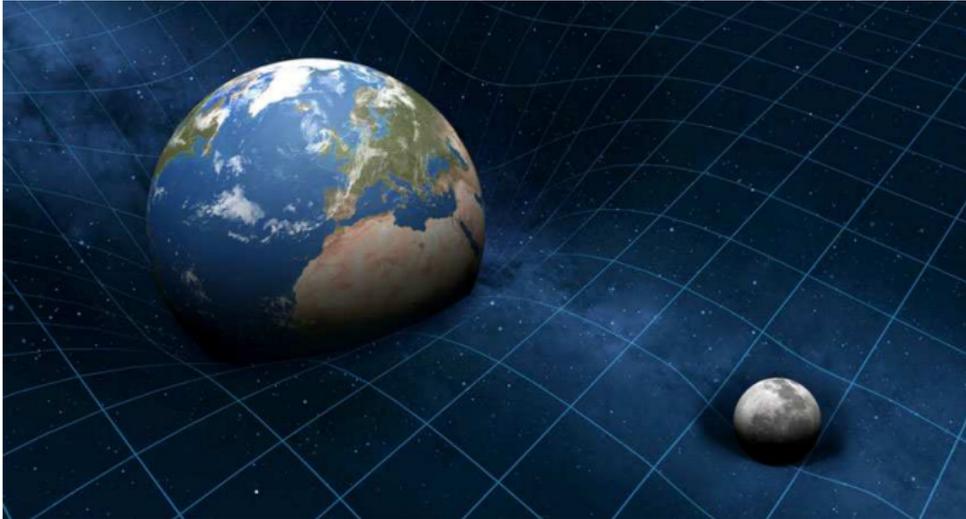
Plan du cours

- 1 Espace, temps et gravitation
- 2 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 3 Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle ?
- 4 Les sources d'ondes gravitationnelles
- 5 Anatomie de l'onde GW150914



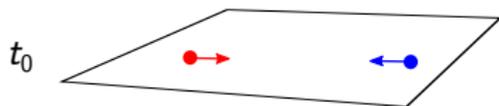
La *relativité générale* est la théorie de l'**espace**, du **temps** et de la **gravitation** formulée par Albert Einstein en 1915

L'espace-temps est courbe

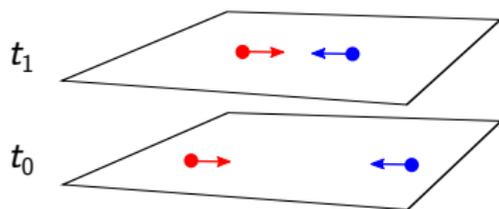


La gravitation est la manifestation de la **courbure de l'espace-temps** par la masse et l'énergie de la matière

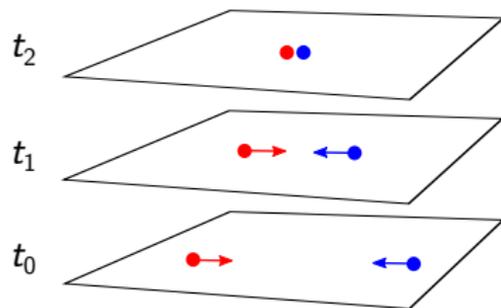
Espace, temps et espace-temps



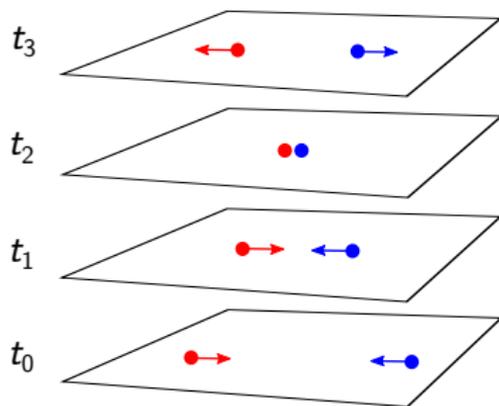
Espace, temps et espace-temps



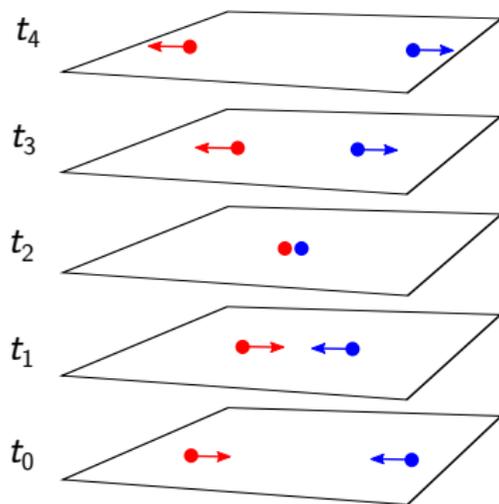
Espace, temps et espace-temps



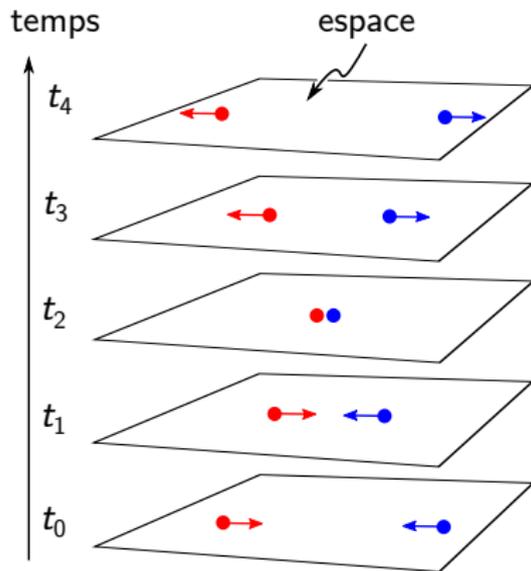
Espace, temps et espace-temps



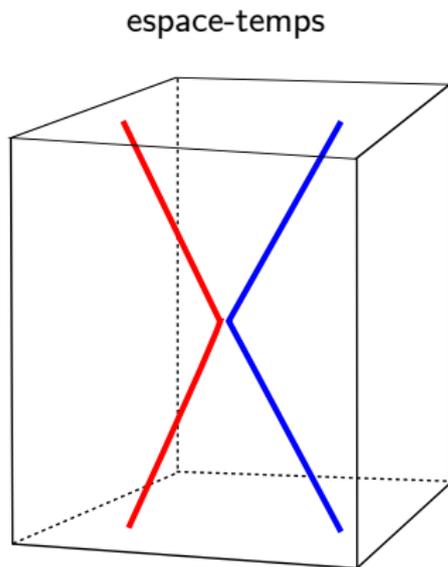
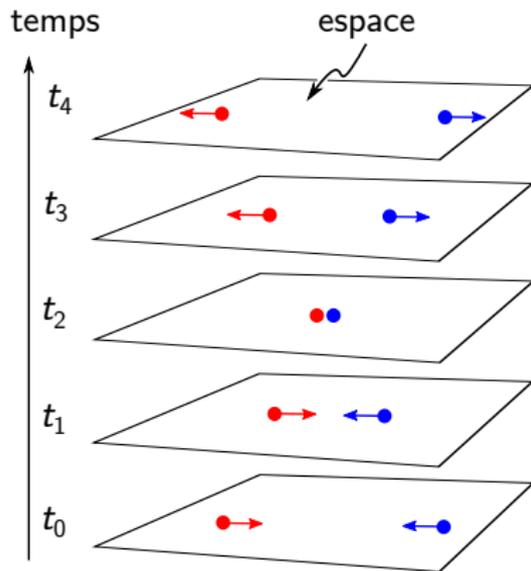
Espace, temps et espace-temps



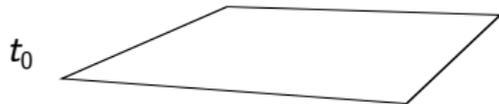
Espace, temps et espace-temps



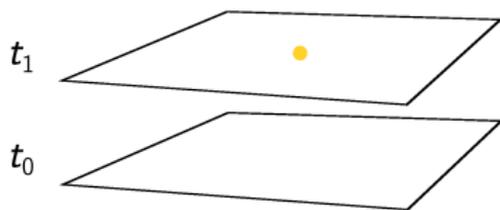
Espace, temps et espace-temps



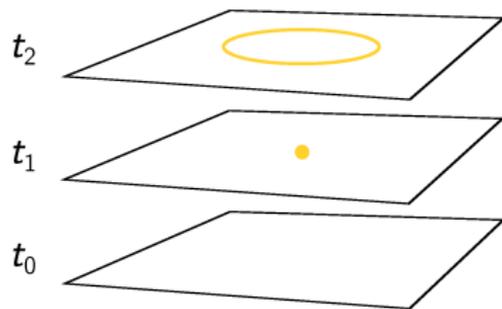
Espace, temps et espace-temps



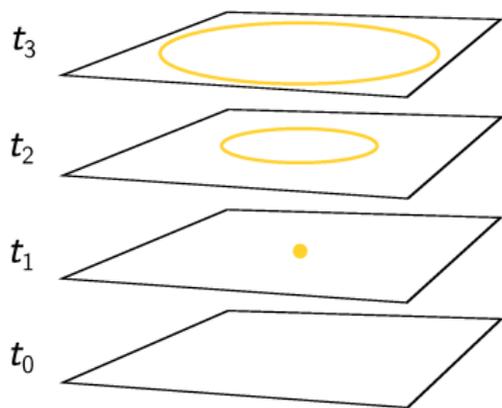
Espace, temps et espace-temps



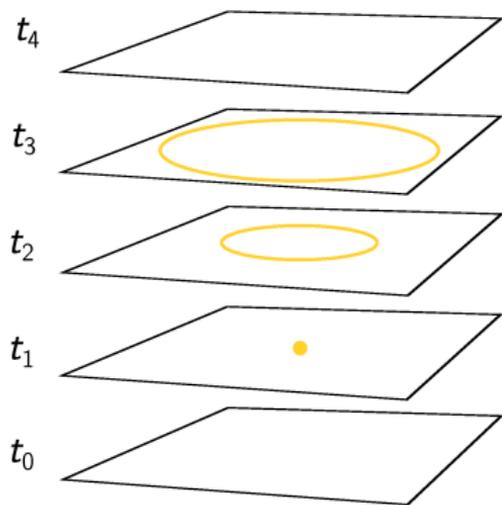
Espace, temps et espace-temps



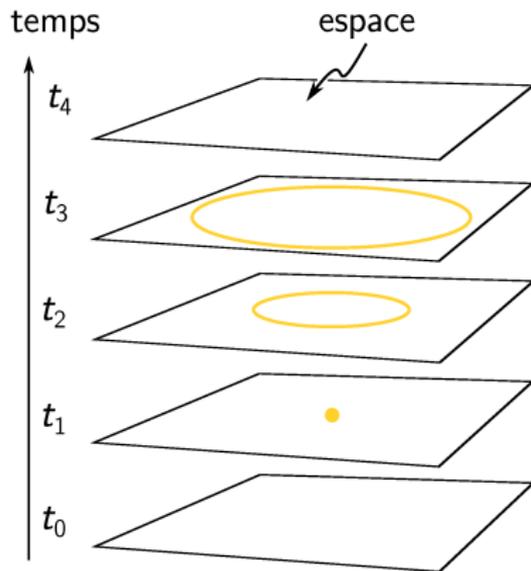
Espace, temps et espace-temps



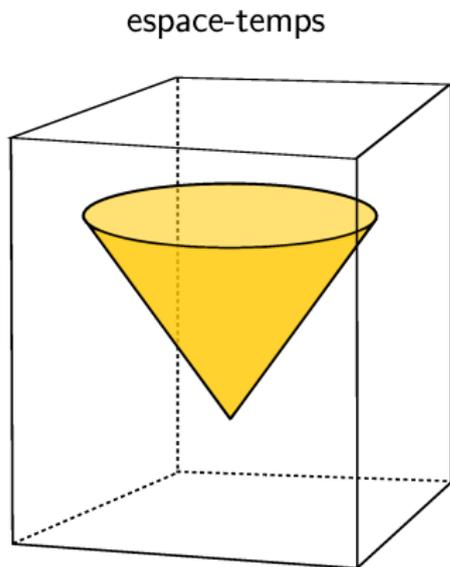
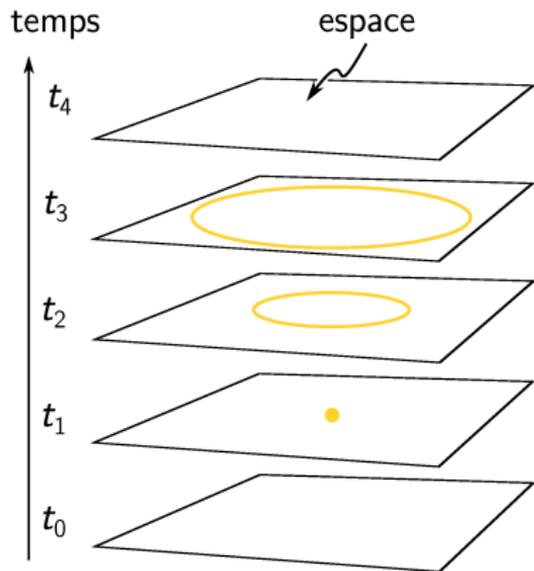
Espace, temps et espace-temps



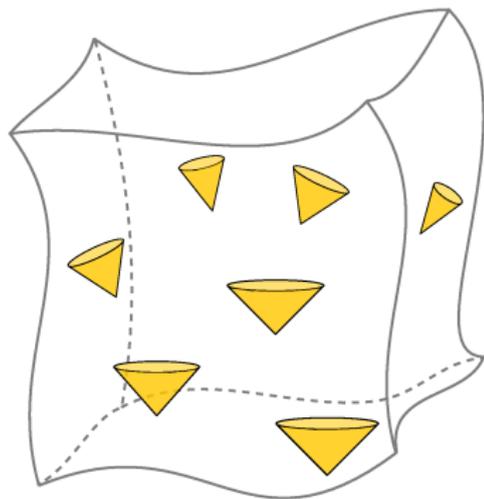
Espace, temps et espace-temps



Espace, temps et espace-temps

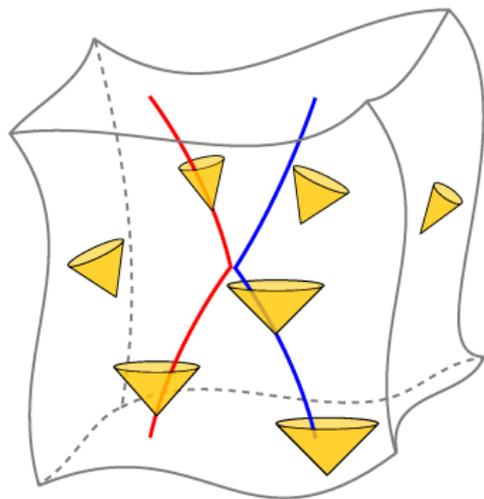


L'espace-temps est courbe



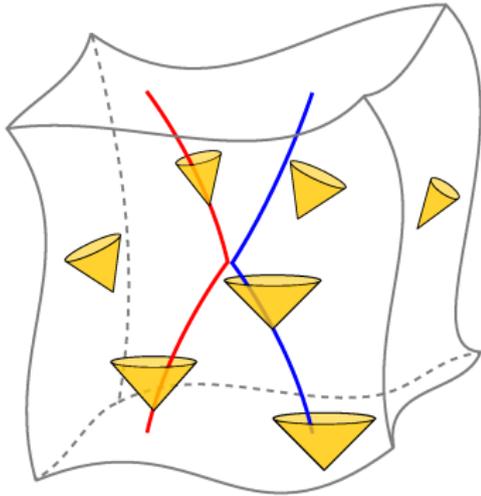
espace-temps

L'espace-temps est courbe



espace-temps

L'espace-temps est courbe



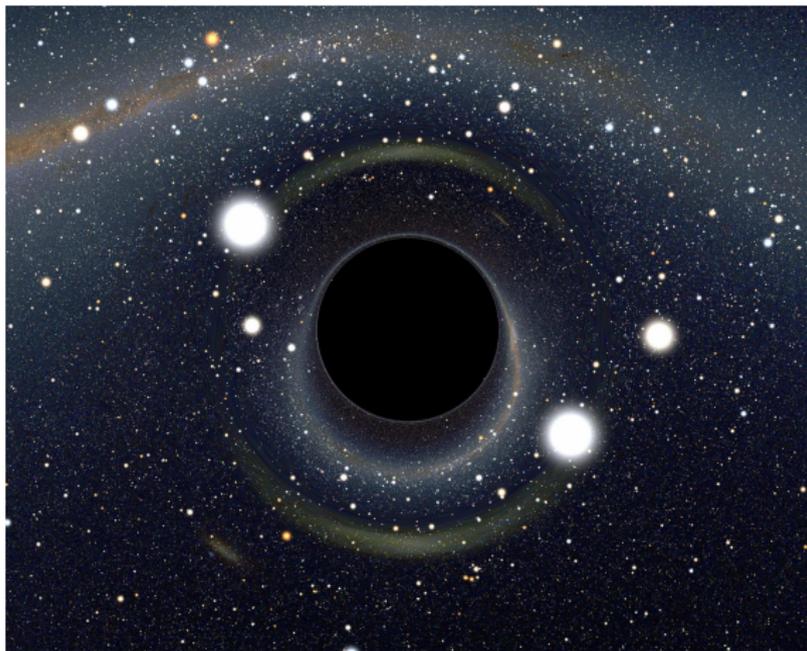
espace-temps



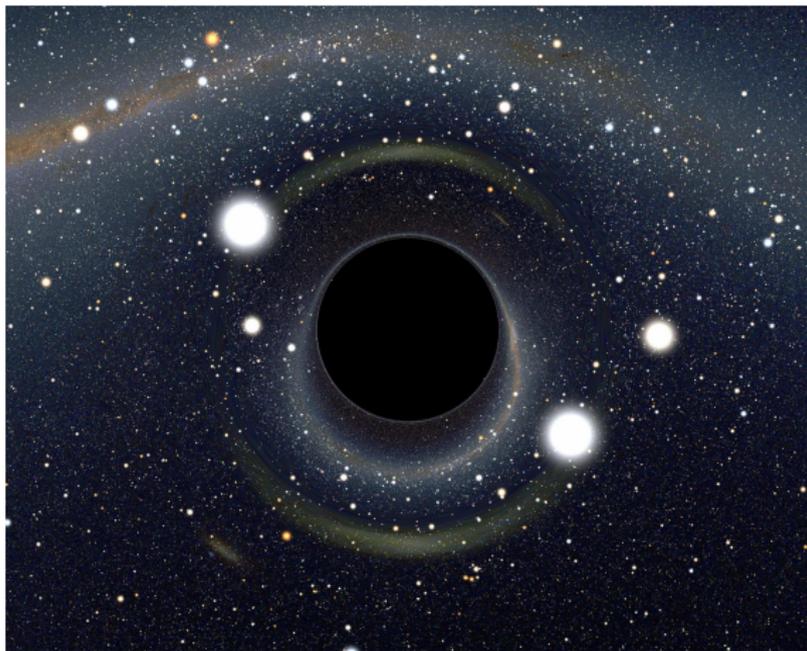
dessert anglais

Plan du cours

- 1 Espace, temps et gravitation
- 2 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 3 Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle ?
- 4 Les sources d'ondes gravitationnelles
- 5 Anatomie de l'onde GW150914



Un **trou noir** est une région de l'espace-temps d'où rien, pas même la lumière, ne peut s'échapper



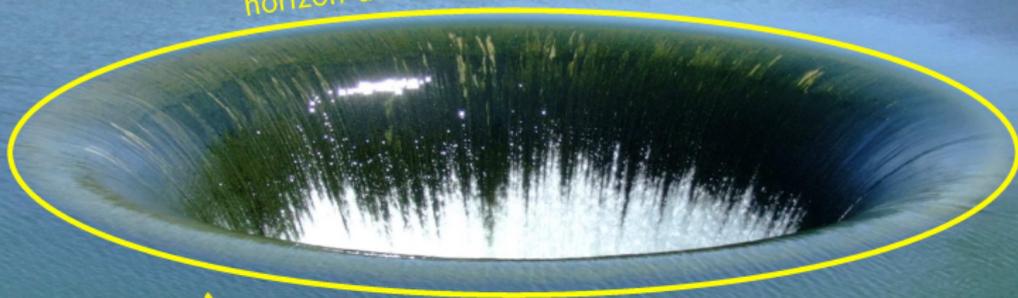
La frontière immatérielle entre l'intérieur du trou noir et le reste de l'univers s'appelle l'**horizon des événements**





poisson-lumière

horizon des événements



poisson-lumière

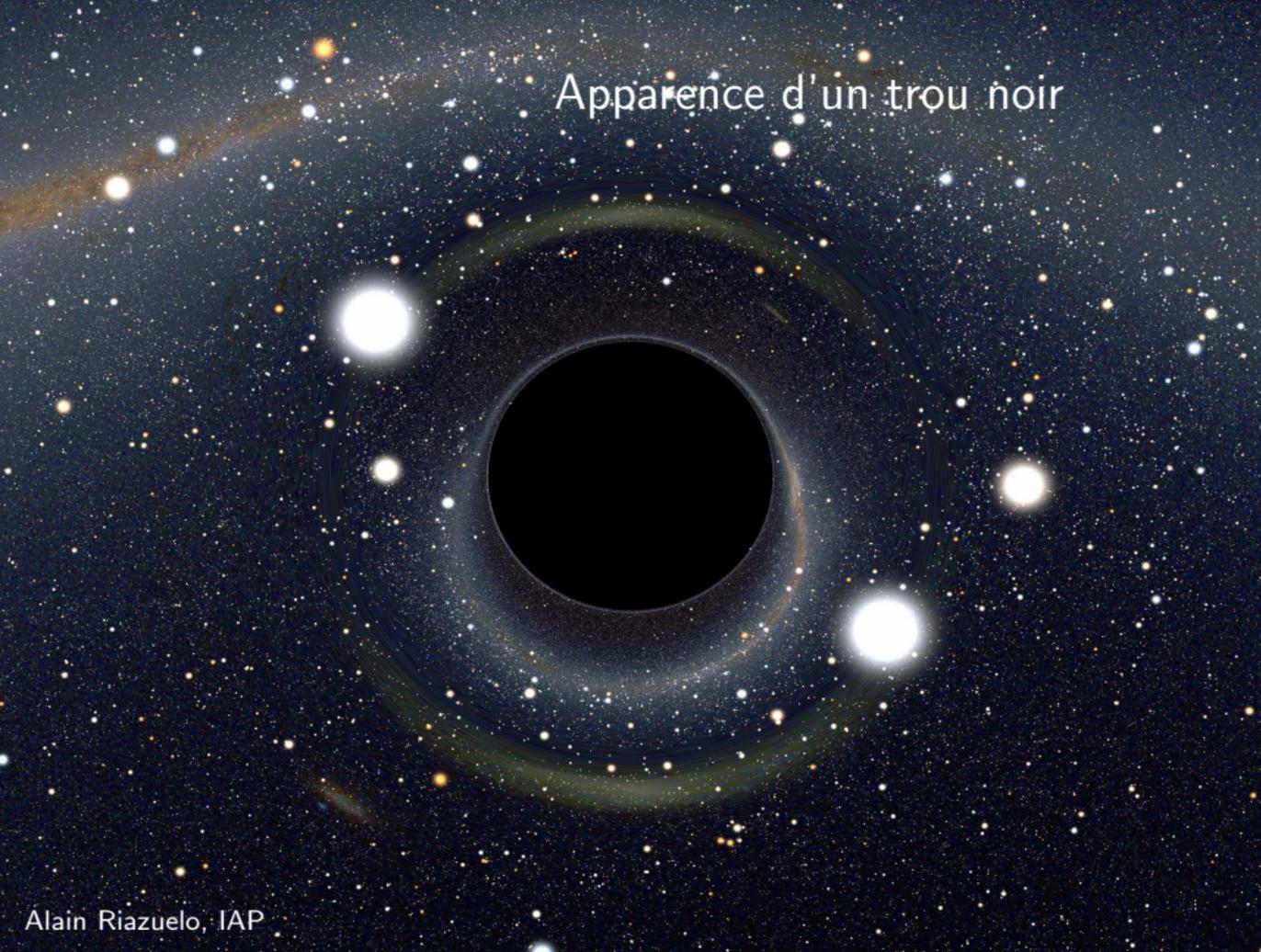
horizon des événements

trou noir

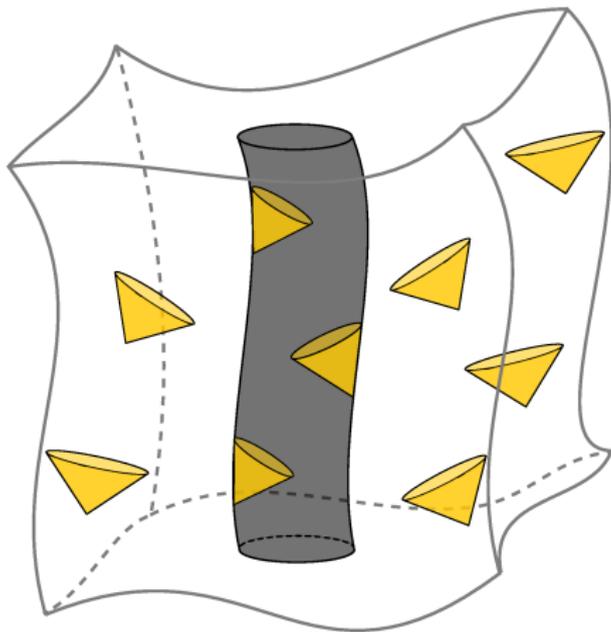


poisson-lumière

Apparence d'un trou noir



Qu'est-ce qu'un trou noir ?

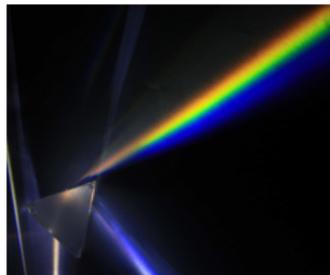
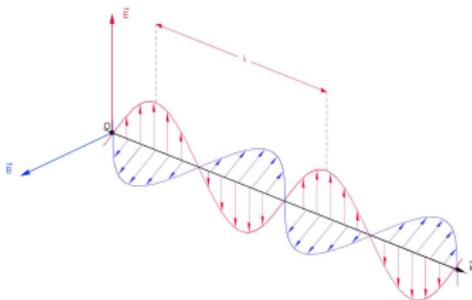
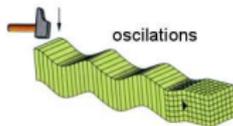
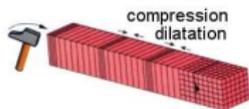
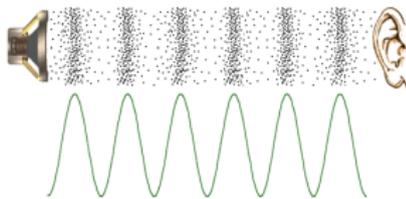


C'est une région de l'espace-temps d'où rien, pas même la lumière, ne peut s'échapper

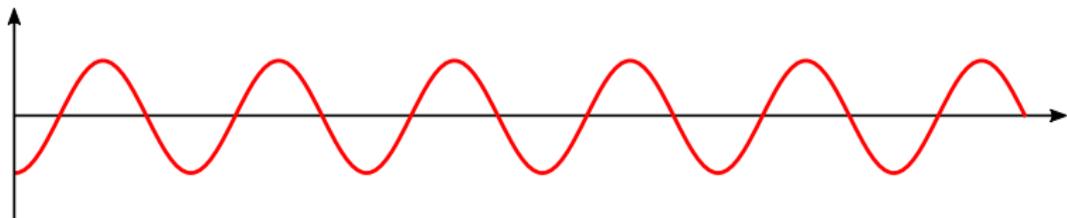
Plan du cours

- 1 Espace, temps et gravitation
- 2 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 3 Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle ?**
- 4 Les sources d'ondes gravitationnelles
- 5 Anatomie de l'onde GW150914

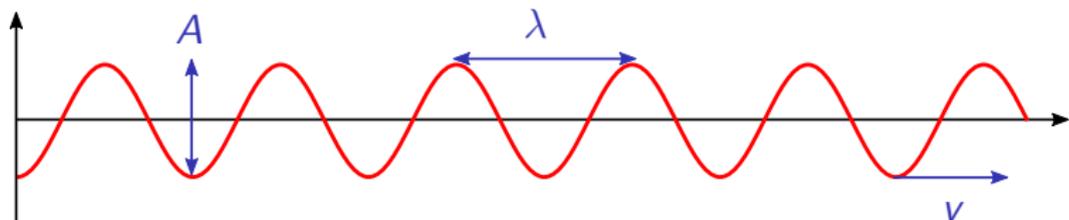
Les phénomènes ondulatoires en physique



Caractéristiques d'une onde

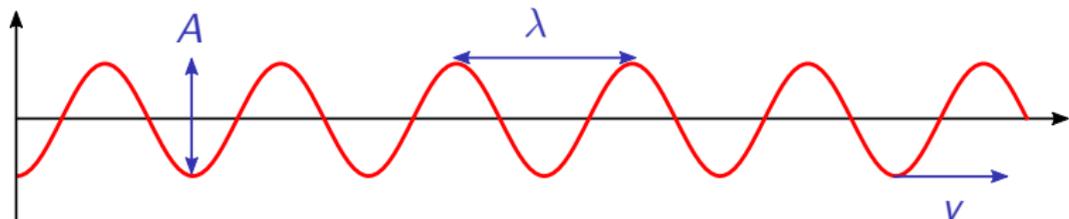


Caractéristiques d'une onde



- vitesse v
- amplitude A
- longueur d'onde λ

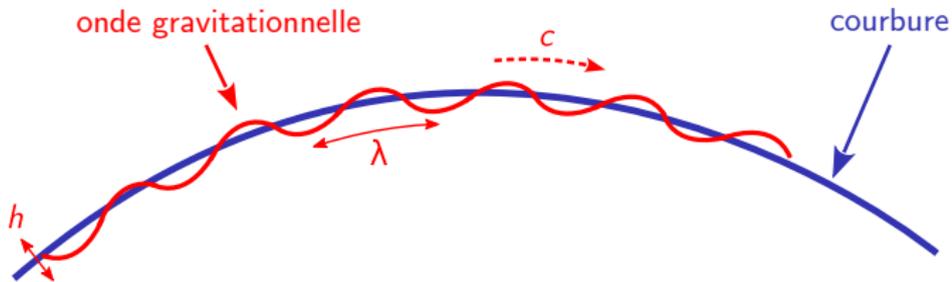
Caractéristiques d'une onde



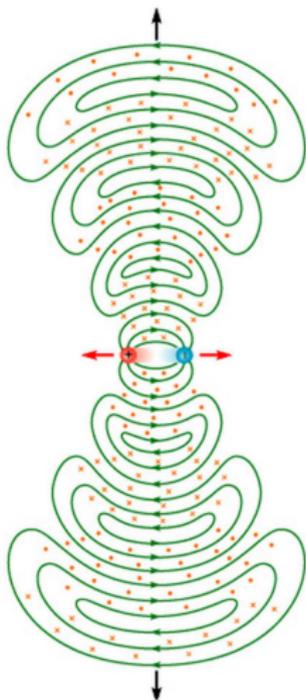
- vitesse v
- amplitude A
- longueur d'onde λ
- période $T = \lambda/v$
- fréquence $f = 1/T$
- pulsation $\omega = 2\pi/T$

Les vibrations de l'espace-temps

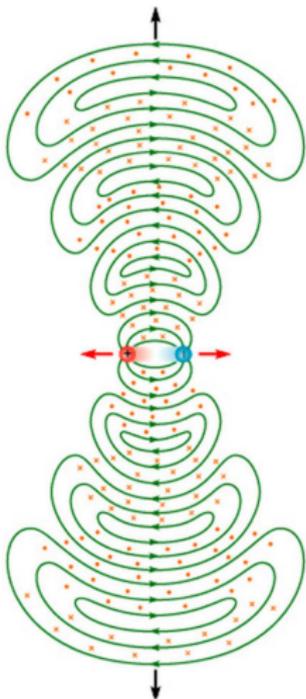
Une **onde gravitationnelle** est une oscillation dans la **courbure** de l'espace-temps qui se propage à la vitesse de la lumière c



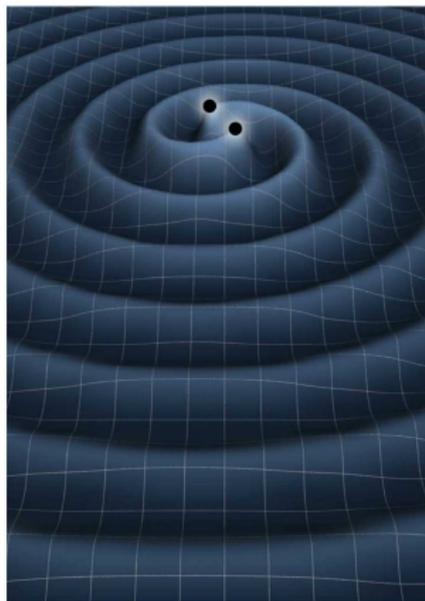
Ondes électromagnétiques



Ondes électromagnétiques



Ondes gravitationnelles



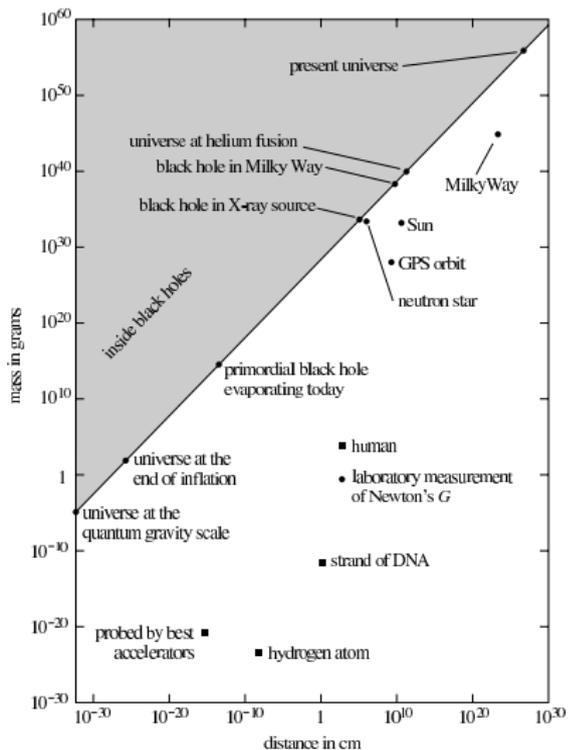
Plan du cours

- 1 Espace, temps et gravitation
- 2 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 3 Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle ?
- 4 Les sources d'ondes gravitationnelles**
- 5 Anatomie de l'onde GW150914

Notion de compacité

$$\text{Compacité} \equiv \frac{G}{c^2} \frac{M}{R}$$

Système	Compacité
Proton	$\sim 10^{-39}$
Lune	$\sim 10^{-11}$
Terre	$\sim 10^{-9}$
Soleil	$\sim 10^{-6}$
Naine blanche	$\sim 10^{-3}$
Étoile à neutrons	$\sim 0,2$
Trou noir	$\sim 0,5$



Densité et compacité

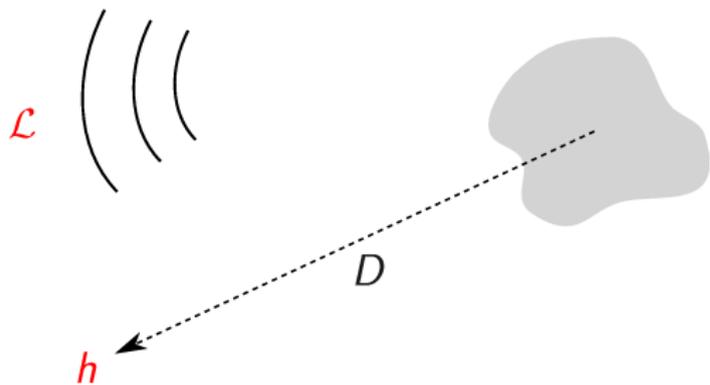
$$\rho = \frac{M}{R^3} \quad C = \frac{G}{c^2} \frac{M}{R}$$

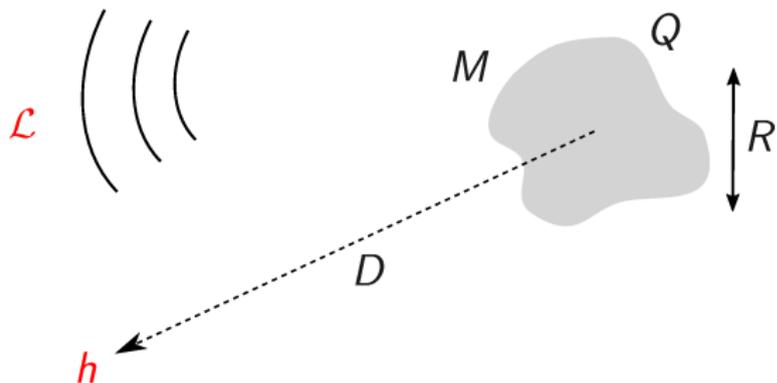
Système	Densité [g/cm ³]	Compacité [sans unité]
Proton	$\sim 10^{15}$	$\sim 10^{-39}$
Lune	3	$\sim 10^{-11}$
Terre	5	$\sim 10^{-9}$
Soleil	1	$\sim 10^{-6}$
Naine blanche	$\sim 10^7$	$\sim 10^{-3}$
Étoile à neutrons	$\sim 10^{15}$	$\sim 0,2$
Trou noir	0	$\sim 0,5$

Un trou noir est *compact*

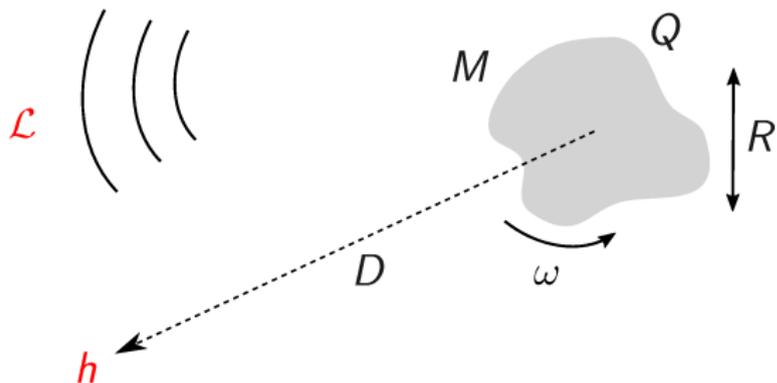


[<https://youtu.be/QgNDao7m41M>]

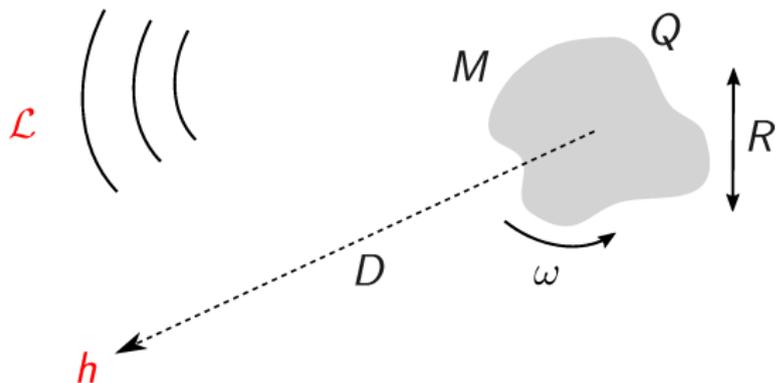




- masse M
- taille caractéristique R
- quadrupôle $Q \sim MR^2$



- masse M
- taille caractéristique R
- quadrupôle $Q \sim MR^2$
- temps caractéristique T
- pulsation $\omega \sim 2\pi/T$
- vitesse $v \sim \omega R$



- masse M
- taille caractéristique R
- quadrupôle $Q \sim MR^2$
- temps caractéristique T
- pulsation $\omega \sim 2\pi/T$
- vitesse $v \sim \omega R$

$$Q(t) \sim MR^2 \cos \omega t \quad \implies \quad \dot{Q} \sim \omega Q$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2}$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2} \sim \frac{2G}{c^4 D} \omega^2 Q$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2} \sim \frac{2G}{c^4 D} \omega^2 Q \sim \frac{2R}{D} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2} \sim \frac{2G}{c^4 D} \omega^2 Q \sim \frac{2R}{D} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

Luminosité gravitationnelle

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left(\frac{d^3 Q}{dt^3}\right)^2$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2} \sim \frac{2G}{c^4 D} \omega^2 Q \sim \frac{2R}{D} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

Luminosité gravitationnelle

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left(\frac{d^3 Q}{dt^3}\right)^2 \sim \frac{G}{5c^5} (\omega^3 Q)^2$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2} \sim \frac{2G}{c^4 D} \omega^2 Q \sim \frac{2R}{D} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

Luminosité gravitationnelle

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left(\frac{d^3 Q}{dt^3}\right)^2 \sim \frac{G}{5c^5} (\omega^3 Q)^2 \sim \frac{c^5}{5G} \left(\frac{v}{c}\right)^6 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2} \sim \frac{2G}{c^4 D} \omega^2 Q \sim \frac{2R}{D} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

Luminosité gravitationnelle

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left(\frac{d^3 Q}{dt^3}\right)^2 \sim \frac{G}{5c^5} (\omega^3 Q)^2 \sim \frac{c^5}{5G} \left(\frac{v}{c}\right)^6 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2$$

Source compacte et relativiste

$$\begin{cases} R \gtrsim GM/c^2 \\ v \lesssim c \end{cases}$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2} \sim \frac{2G}{c^4 D} \omega^2 Q \sim \frac{2R}{D} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

Luminosité gravitationnelle

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left(\frac{d^3 Q}{dt^3}\right)^2 \sim \frac{G}{5c^5} (\omega^3 Q)^2 \sim \frac{c^5}{5G} \left(\frac{v}{c}\right)^6 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2$$

Source compacte et relativiste

$$\begin{cases} R \gtrsim GM/c^2 \\ v \lesssim c \end{cases} \implies \begin{cases} h \lesssim GM/(c^2 D) \\ \mathcal{L} \lesssim c^5/(5G) \end{cases}$$

Formules du quadrupôle

Amplitude de l'onde

$$h = \frac{2G}{c^4 D} \frac{d^2 Q}{dt^2} \sim \frac{2G}{c^4 D} \omega^2 Q \sim \frac{2R}{D} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

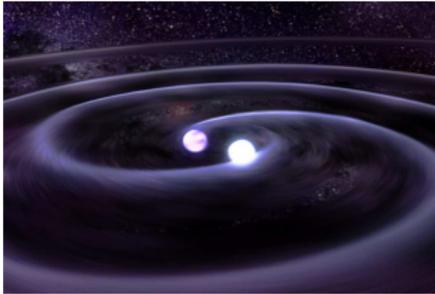
Luminosité gravitationnelle

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left(\frac{d^3 Q}{dt^3}\right)^2 \sim \frac{G}{5c^5} (\omega^3 Q)^2 \sim \frac{c^5}{5G} \left(\frac{v}{c}\right)^6 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2$$

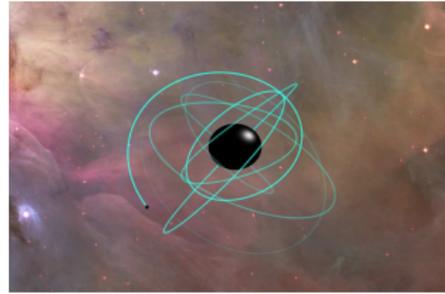
Source compacte et relativiste

$$\begin{cases} R \gtrsim GM/c^2 \\ v \lesssim c \end{cases} \implies \begin{cases} h \lesssim GM/(c^2 D) \simeq 10^{-21} \\ \mathcal{L} \lesssim c^5/(5G) \simeq 10^{52} \text{ W} \end{cases}$$

Binaires d'astres compacts



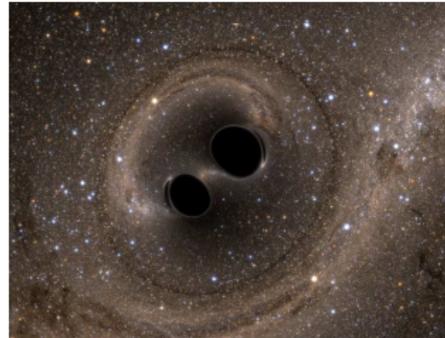
naines blanches



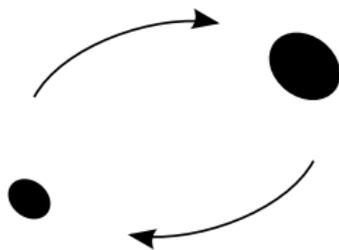
trous noirs

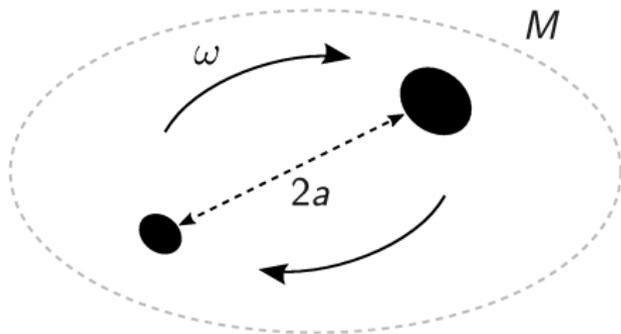


étoiles à neutrons

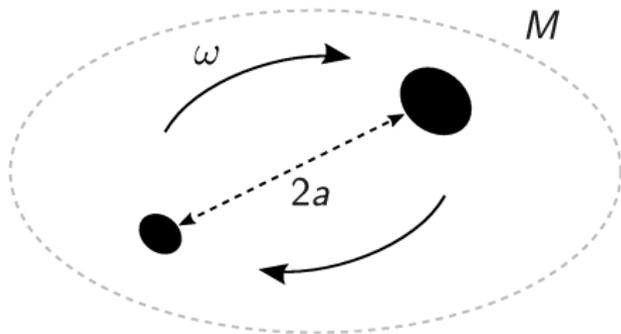


trous noirs





- masse M
- demi-grand axe a
- vitesse angulaire ω



- masse M
- demi-grand axe a
- vitesse angulaire ω

Troisième loi de Kepler

$$GM = \omega^2 a^3$$

Fréquence caractéristique des ondes

Source autogravitante relativiste

$$\begin{cases} GM = \omega^2 a^3 \\ v = \omega a \lesssim c \end{cases}$$

Fréquence caractéristique des ondes

Source autogravitante relativiste

$$\begin{cases} GM = \omega^2 a^3 \\ v = \omega a \lesssim c \end{cases} \implies a \gtrsim \frac{GM}{c^2}$$

Fréquence caractéristique des ondes

Source autogravitante relativiste

$$\begin{cases} GM = \omega^2 a^3 \\ v = \omega a \lesssim c \end{cases} \implies a \gtrsim \frac{GM}{c^2}$$

Fréquence des ondes émises

$$2\pi f_{\text{og}} = \omega_{\text{og}} = 2\omega$$

Fréquence caractéristique des ondes

Source autogravitante relativiste

$$\begin{cases} GM = \omega^2 a^3 \\ v = \omega a \lesssim c \end{cases} \implies a \gtrsim \frac{GM}{c^2}$$

Fréquence des ondes émises

$$2\pi f_{\text{og}} = \omega_{\text{og}} = 2\omega \implies f_{\text{og}} \lesssim \frac{1}{\pi} \frac{c^3}{GM} \propto \frac{1}{M}$$

Fréquence caractéristique des ondes

Source autogravitante relativiste

$$\begin{cases} GM = \omega^2 a^3 \\ v = \omega a \lesssim c \end{cases} \implies a \gtrsim \frac{GM}{c^2}$$

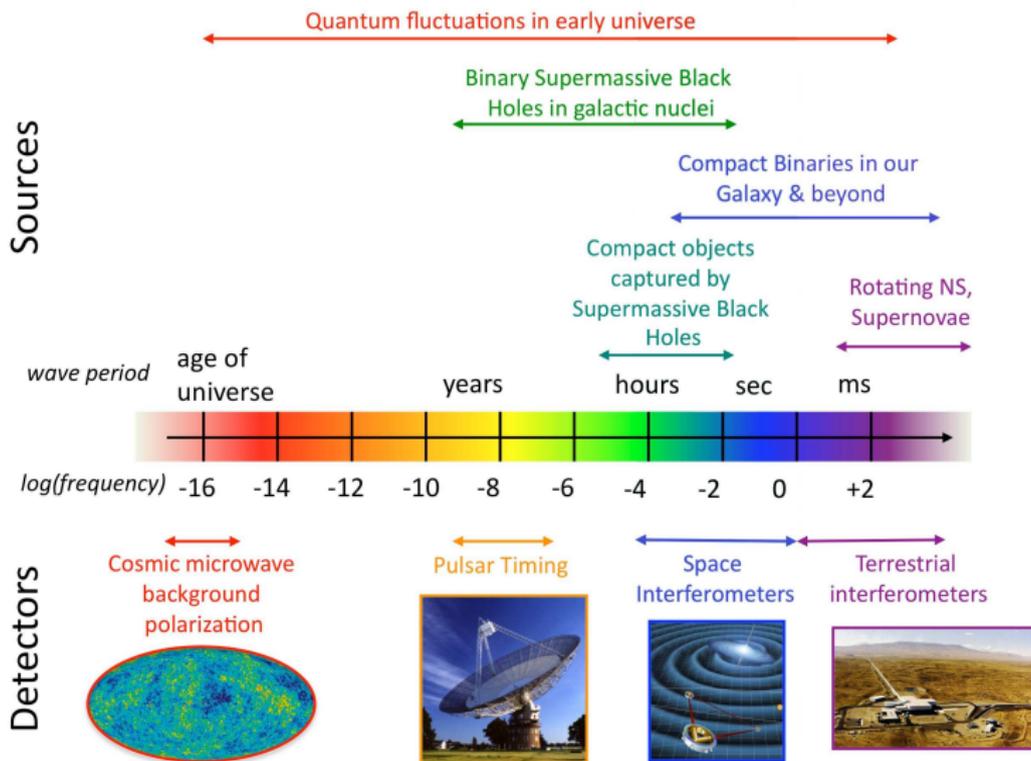
Fréquence des ondes émises

$$2\pi f_{\text{og}} = \omega_{\text{og}} = 2\omega \implies f_{\text{og}} \lesssim \frac{1}{\pi} \frac{c^3}{GM} \propto \frac{1}{M}$$

Application numérique

$$M = 60M_{\odot} \implies f_{\text{og}} \lesssim 1 \text{ kHz}$$

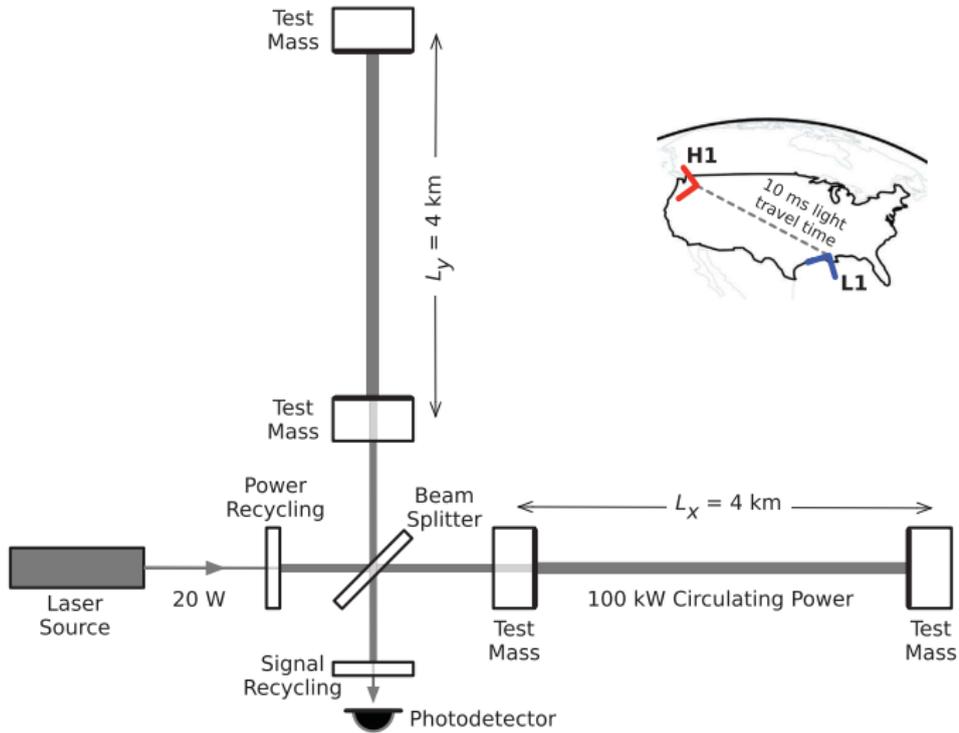
Le spectre des ondes gravitationnelles



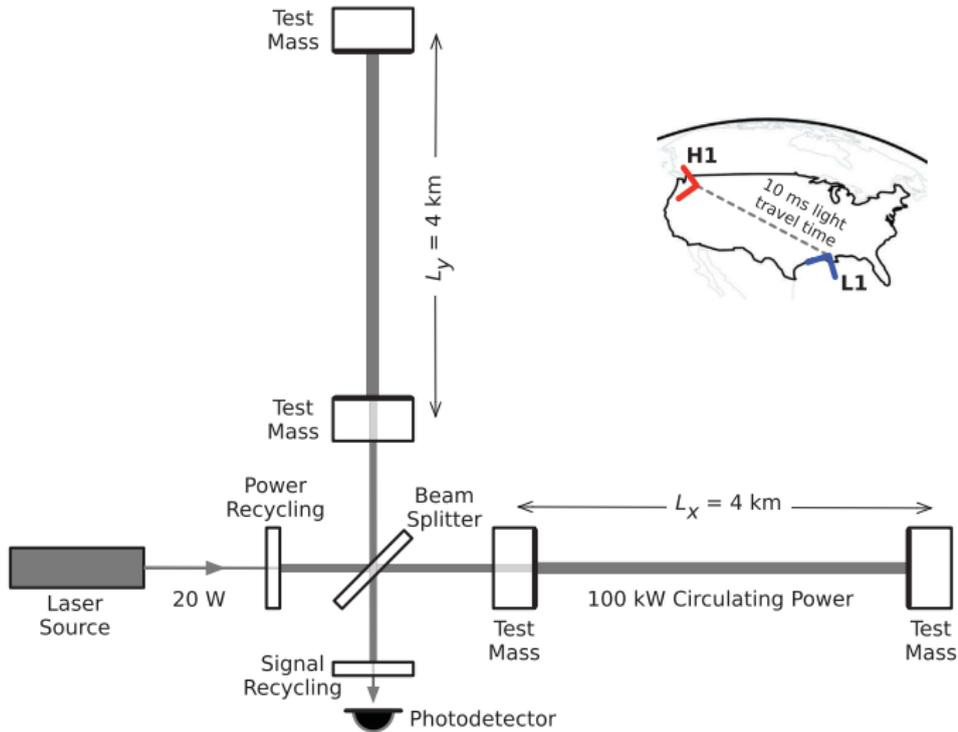
Plan du cours

- 1 Espace, temps et gravitation
- 2 Qu'est-ce qu'un trou noir ?
- 3 Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle ?
- 4 Les sources d'ondes gravitationnelles
- 5 Anatomie de l'onde GW150914**

Les détecteurs LIGO

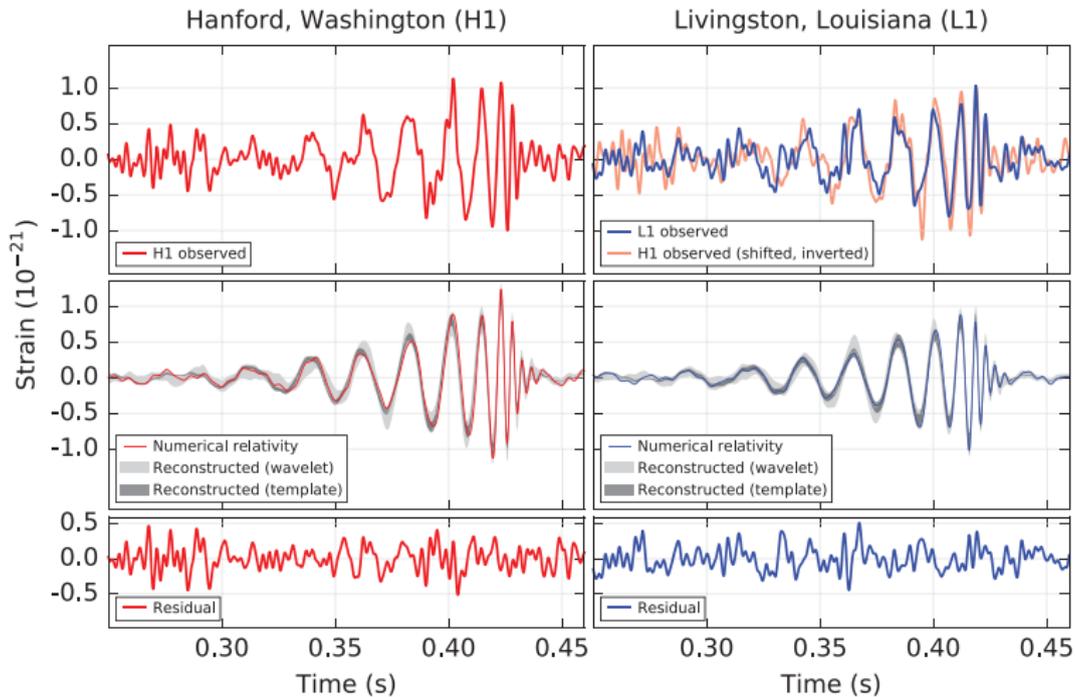


Les détecteurs LIGO

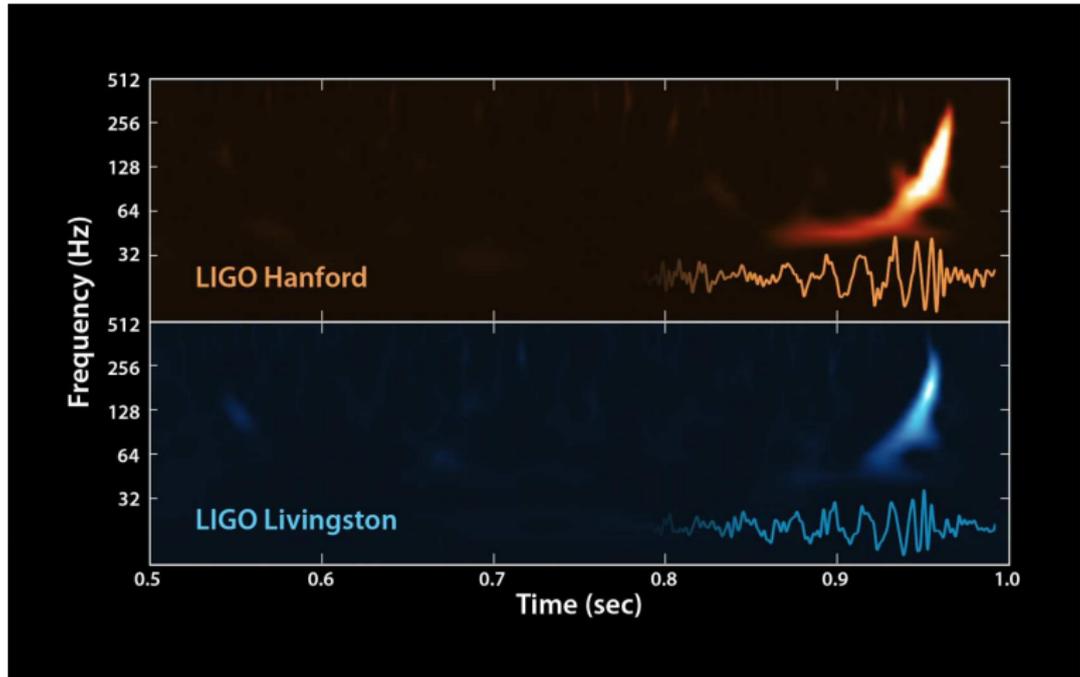


Voir le **cours fil rouge** de A. Bohé demain matin à 9h30

La première détection !

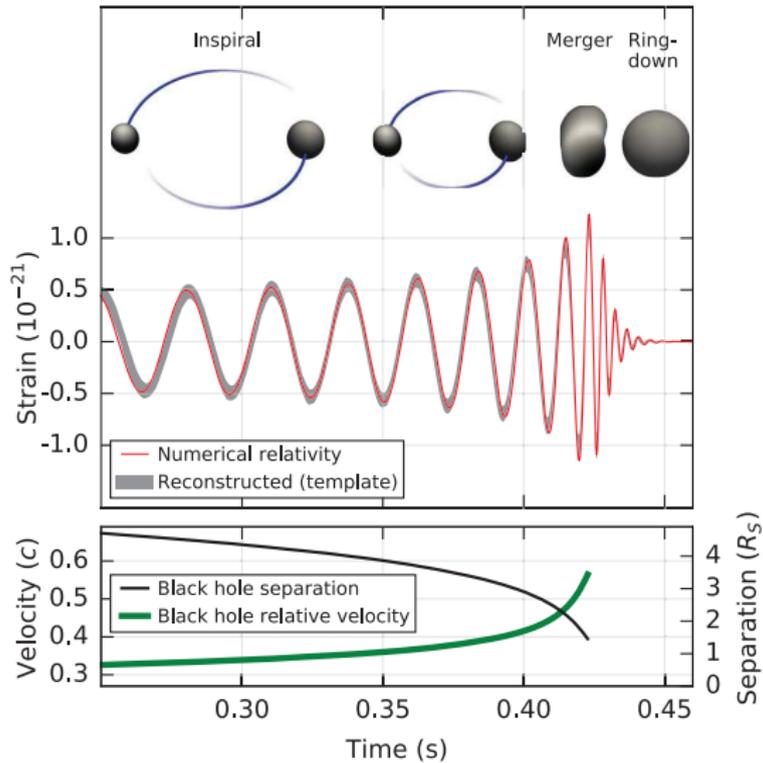


La première détection !

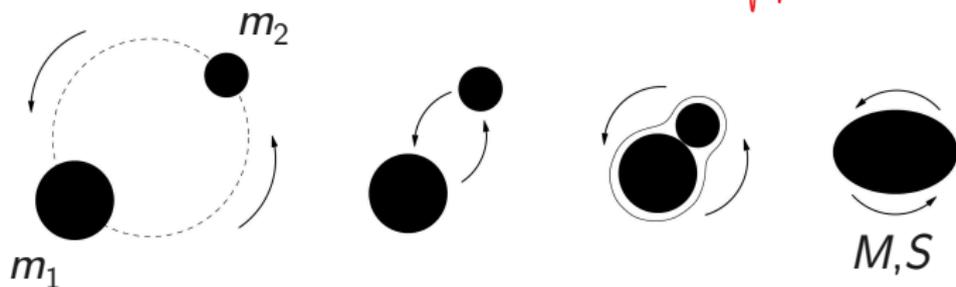
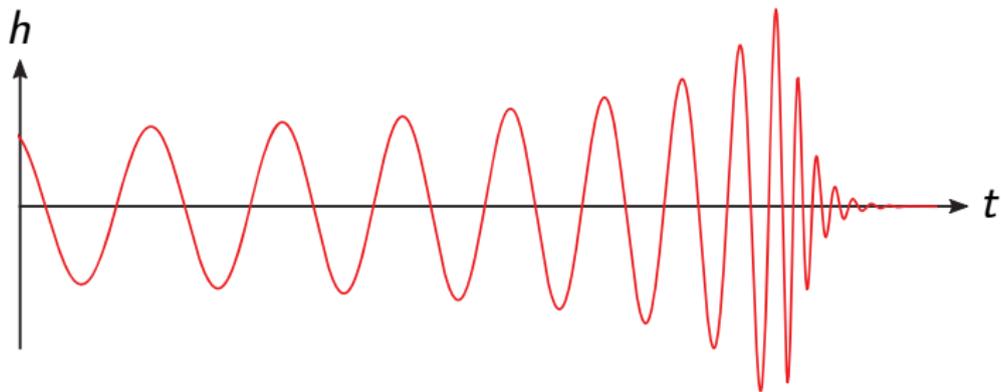


[<https://youtu.be/QyDcTbR-kEA>]

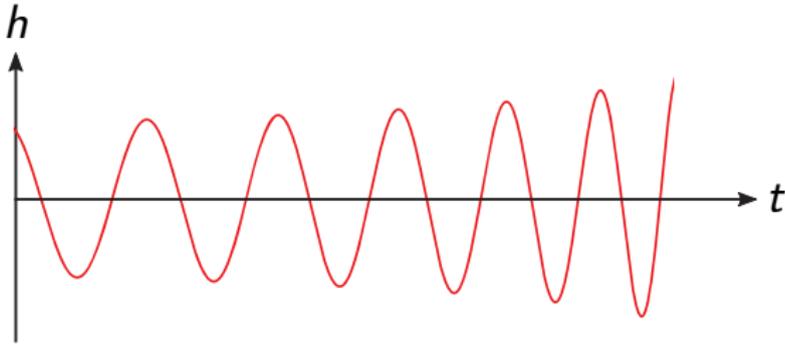
Deux trous noirs ont fusionné



La forme d'onde optimale



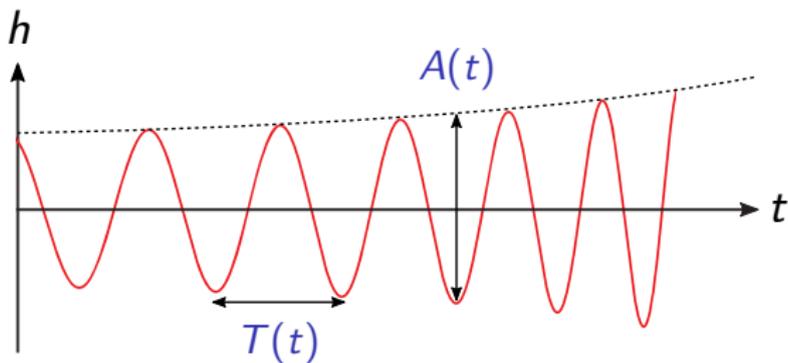
La phase de spiralement



Objectifs :

- Mesurer la **distance** D de la source
- Mesurer les **masses** m_1 et m_2 des trous noirs

La phase de spiralement



Caractéristiques :

- Fréquence variable $f(t) = 1/T(t)$
- Amplitude variable $A(t)$

La phase de spiralement

Formules du quadrupôle

$$A(t) = \frac{4G}{c^2} \frac{\mathcal{M}}{D} \left(\frac{G}{c^3} \pi f(t) \mathcal{M} \right)^{2/3}$$
$$\dot{f}(t) = \frac{96}{5} \frac{c^3}{G} \frac{f(t)}{\mathcal{M}} \left(\frac{G}{c^3} \pi f(t) \mathcal{M} \right)^{8/3} > 0$$

La phase de spiralement

Formules du quadrupôle

$$A(t) = \frac{4G}{c^2} \frac{\mathcal{M}}{D} \left(\frac{G}{c^3} \pi f(t) \mathcal{M} \right)^{2/3}$$
$$\dot{f}(t) = \frac{96}{5} \frac{c^3}{G} \frac{f(t)}{\mathcal{M}} \left(\frac{G}{c^3} \pi f(t) \mathcal{M} \right)^{8/3} > 0$$

Masse de gazouillement

$$\mathcal{M} \equiv \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$$

La phase de spiralement

Masse de gazouillement et distance

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5} \quad D = \frac{5c}{24\pi^2} \frac{\dot{f}}{f^3 A}$$

La phase de spiralement

Masse de gazouillement et distance

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5} \quad D = \frac{5c}{24\pi^2} \frac{\dot{f}}{f^3 A}$$

Application numérique

$$\mathcal{M} \simeq 30 M_{\odot} \quad D \simeq 400 \text{ Mpc}$$

La phase de spiralement

Masse de gazouillement et distance

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5} \quad D = \frac{5c}{24\pi^2} \frac{\dot{f}}{f^3 A}$$

Application numérique

$$\mathcal{M} \simeq 30 M_{\odot} \quad D \simeq 400 \text{ Mpc}$$

Masses des trous noirs

$$m_1 \simeq m_2 \equiv m$$

La phase de spiralement

Masse de gazouillement et distance

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5} \quad D = \frac{5c}{24\pi^2} \frac{\dot{f}}{f^3 A}$$

Application numérique

$$\mathcal{M} \simeq 30 M_{\odot} \quad D \simeq 400 \text{ Mpc}$$

Masses des trous noirs

$$m_1 \simeq m_2 \equiv m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M} = m/2^{1/5}$$

La phase de spiralement

Masse de gazouillement et distance

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5} \quad D = \frac{5c}{24\pi^2} \frac{\dot{f}}{f^3 A}$$

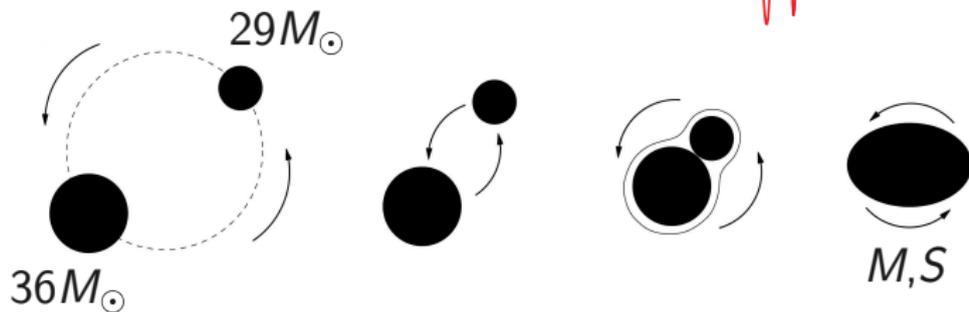
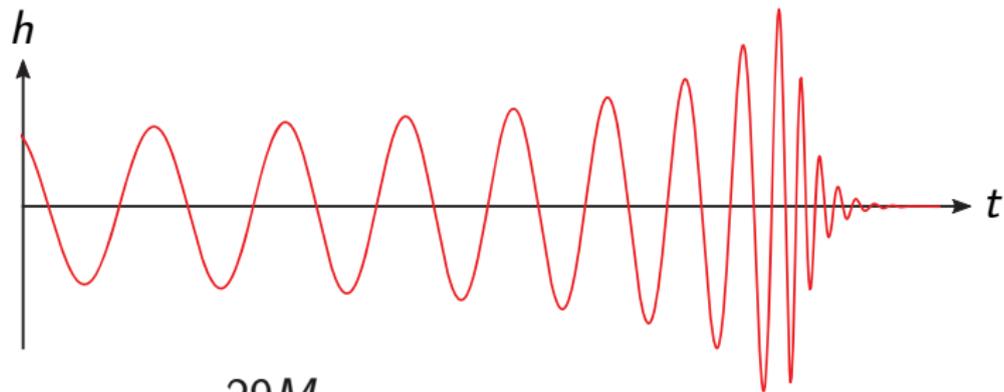
Application numérique

$$\mathcal{M} \simeq 30 M_{\odot} \quad D \simeq 400 \text{ Mpc}$$

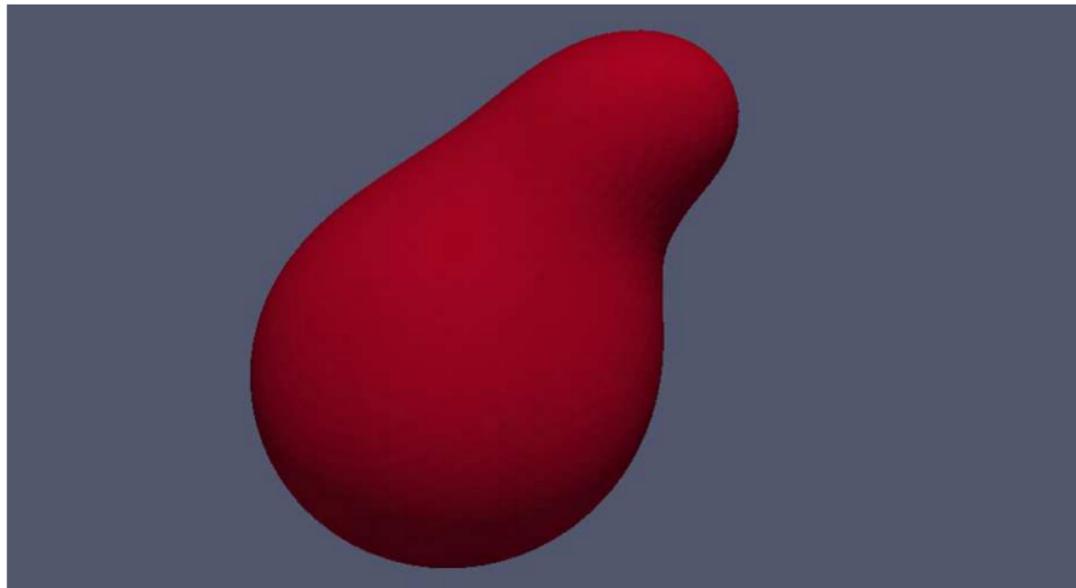
Masses des trous noirs

$$m_1 \simeq m_2 \equiv m \implies \mathcal{M} = m/2^{1/5} \implies m \simeq 34 M_{\odot}$$

La forme d'onde optimale

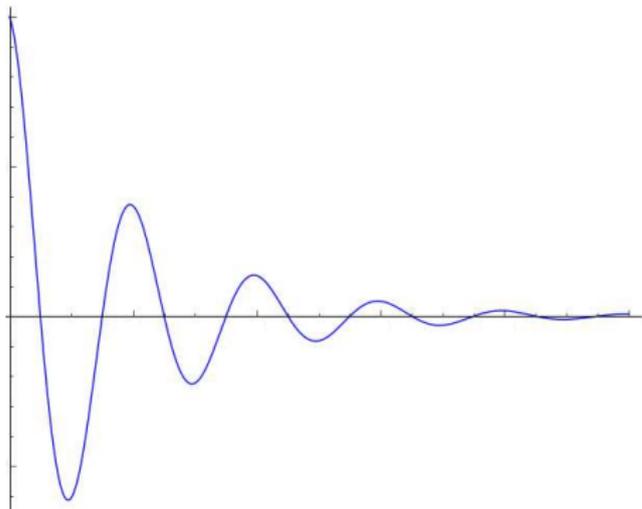


La phase de désexcitation



[<https://youtu.be/Tr1zDVbSjTM>]

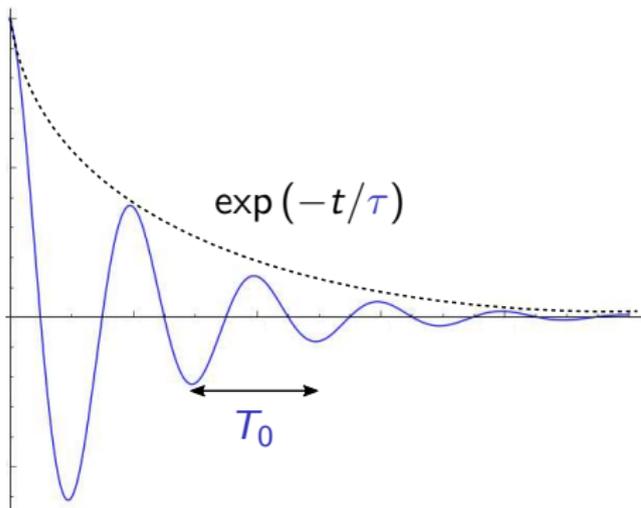
La phase de désexcitation



Objectifs :

- Mesurer la **masse M** et le **spin S** du trou noir final
- Faire un bilan de masse-énergie : $m_1 + m_2 \stackrel{?}{=} M$

La phase de désexcitation



Caractéristiques :

- fréquence caractéristique $f_0 = 1/T_0 \simeq 250$ Hz
- temps d'amortissement $\tau \simeq 4$ ms

La phase de désexcitation

Propriétés du trou noir final :

- masse $M \simeq 62M_{\odot}$
- spin $S \simeq 67\% S_{\max}$
- vitesse angulaire $\Omega \simeq 100$ tours/s

La phase de désexcitation

Propriétés du trou noir final :

- masse $M \simeq 62M_{\odot}$
- spin $S \simeq 67\% S_{\max}$
- vitesse angulaire $\Omega \simeq 100$ tours/s

Bilan de masse-énergie :

$$m_1 + m_2 - M \simeq 3M_{\odot}$$

La phase de désexcitation

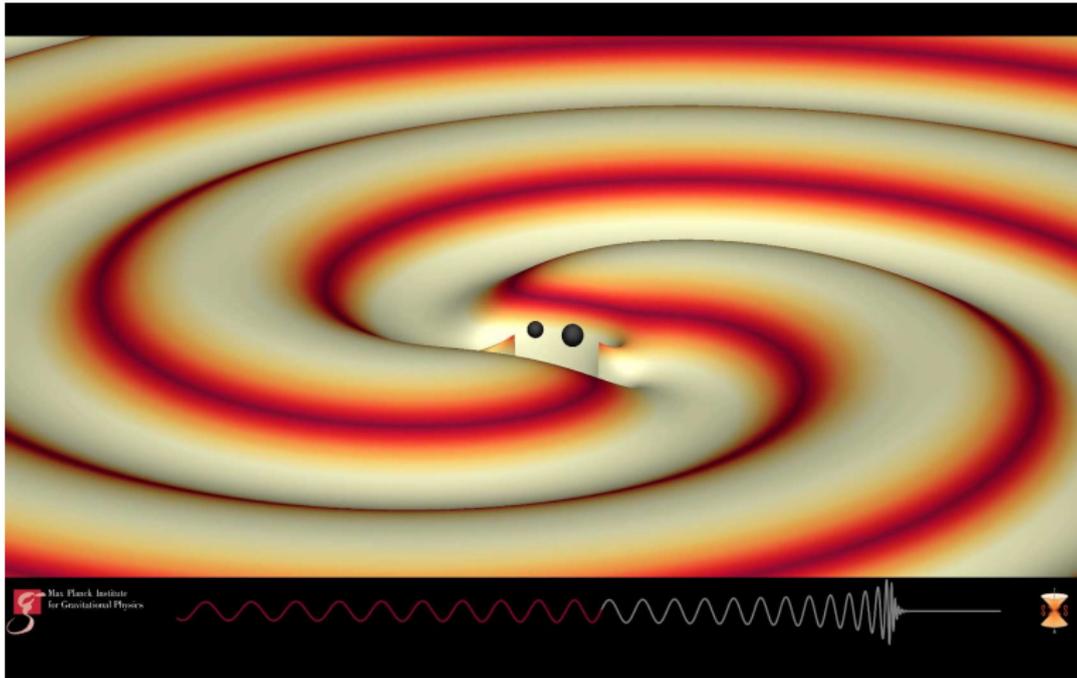
Propriétés du trou noir final :

- masse $M \simeq 62M_{\odot}$
- spin $S \simeq 67\% S_{\max}$
- vitesse angulaire $\Omega \simeq 100$ tours/s

Bilan de masse-énergie :

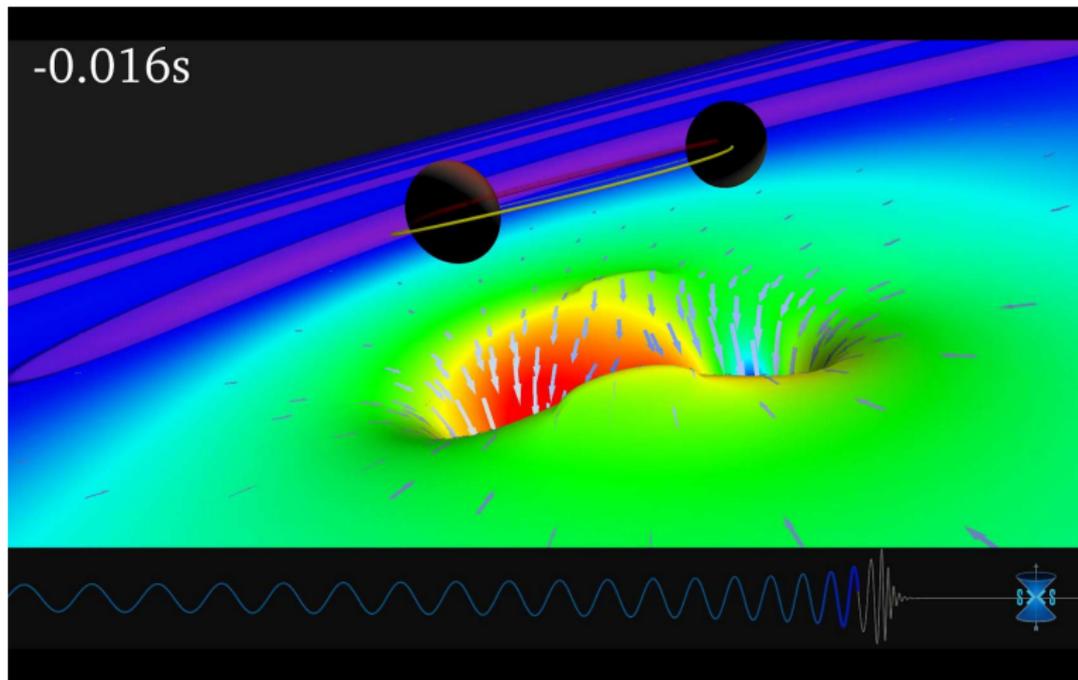
$$m_1 + m_2 - M \simeq 3M_{\odot} \implies \Delta E_{\text{og}} \simeq 3M_{\odot}c^2 \simeq 10^{47} \text{ J}$$

Simulation de la fusion



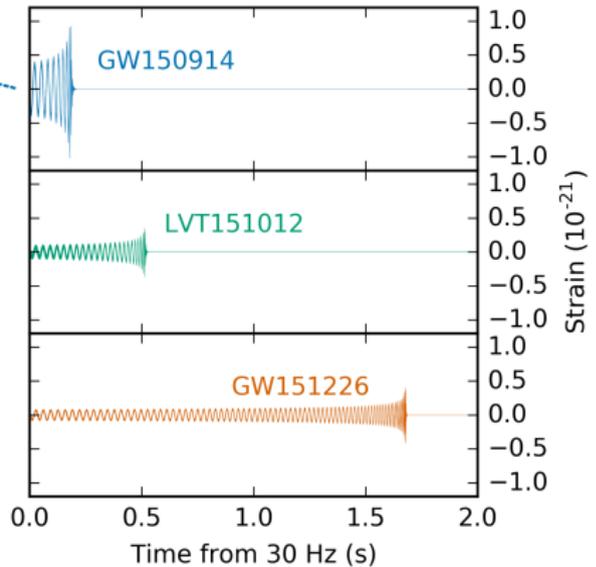
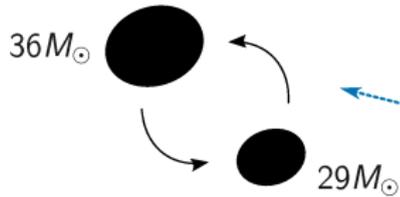
[https://youtu.be/_GhkWuIDzpc]

Simulation de la fusion

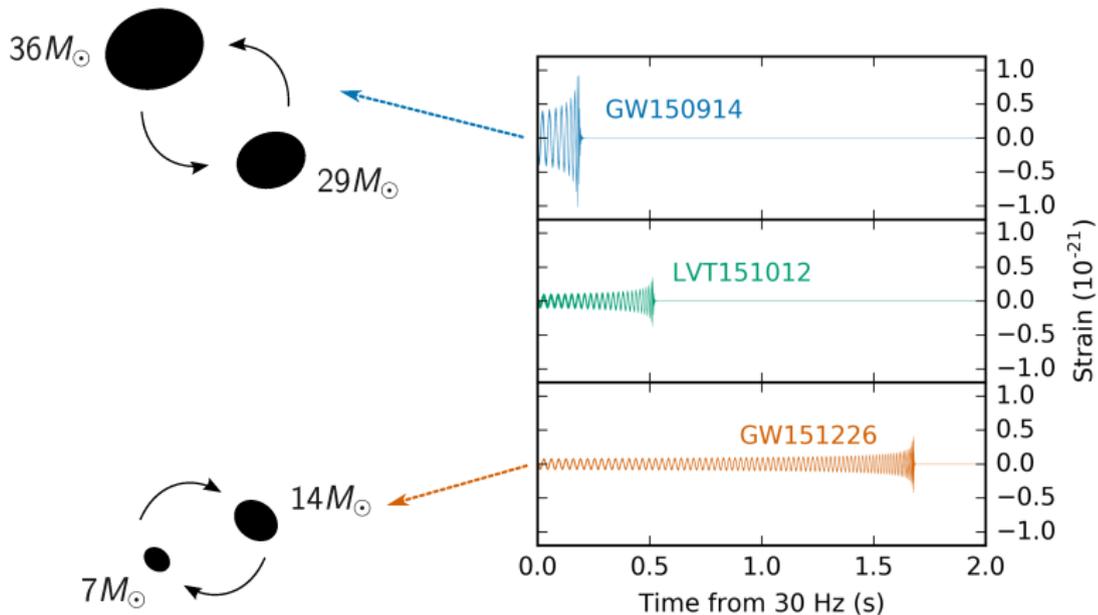


[<https://youtu.be/c-2XluNFgD0>]

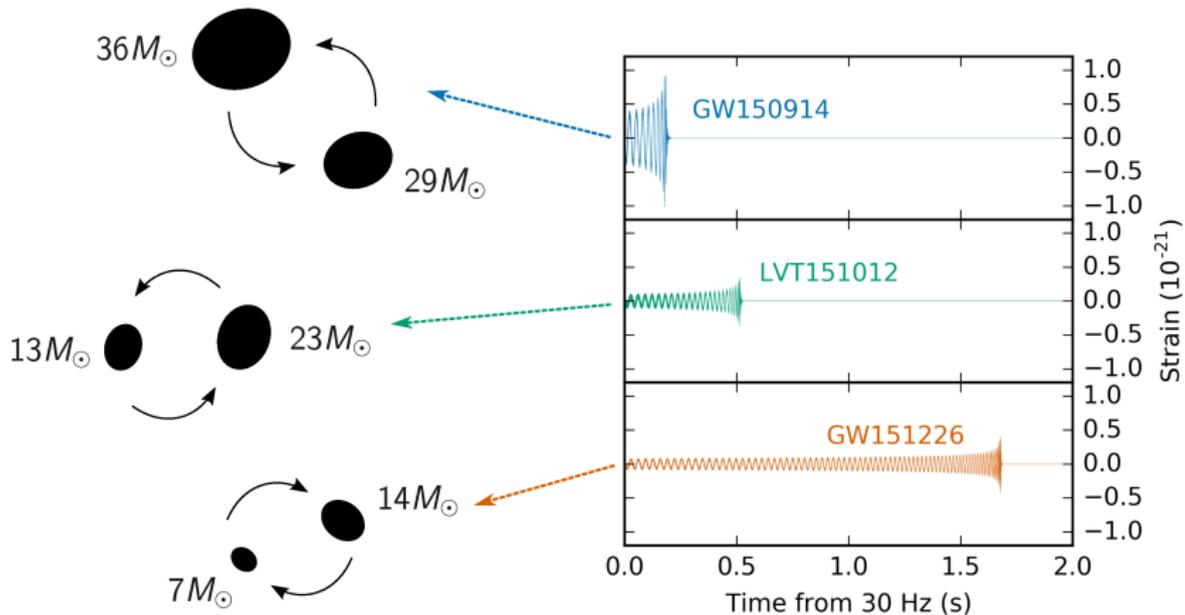
Trois détections en quelques mois



Trois détections en quelques mois



Trois détections en quelques mois



- Les ondes gravitationnelles sont des **oscillations de courbure** qui se propagent dans l'Univers à la vitesse de la lumière
- Ces ondes sont générées par l'accélération de grandes **concentrations de masses**
- Les sources d'ondes gravitationnelles les plus prometteuses sont **compactes** et **relativistes**
- Des ondes gravitationnelles émises lors de la **coalescence de deux trous noirs** ont récemment été détectées
- En analysant la forme de ce signal, il est possible de remonter aux **propriétés physiques** de cette source

Demain à 9h30, **cours fil rouge** par Alejandro Bohé :

Comment détecte-t-on une onde gravitationnelle ?