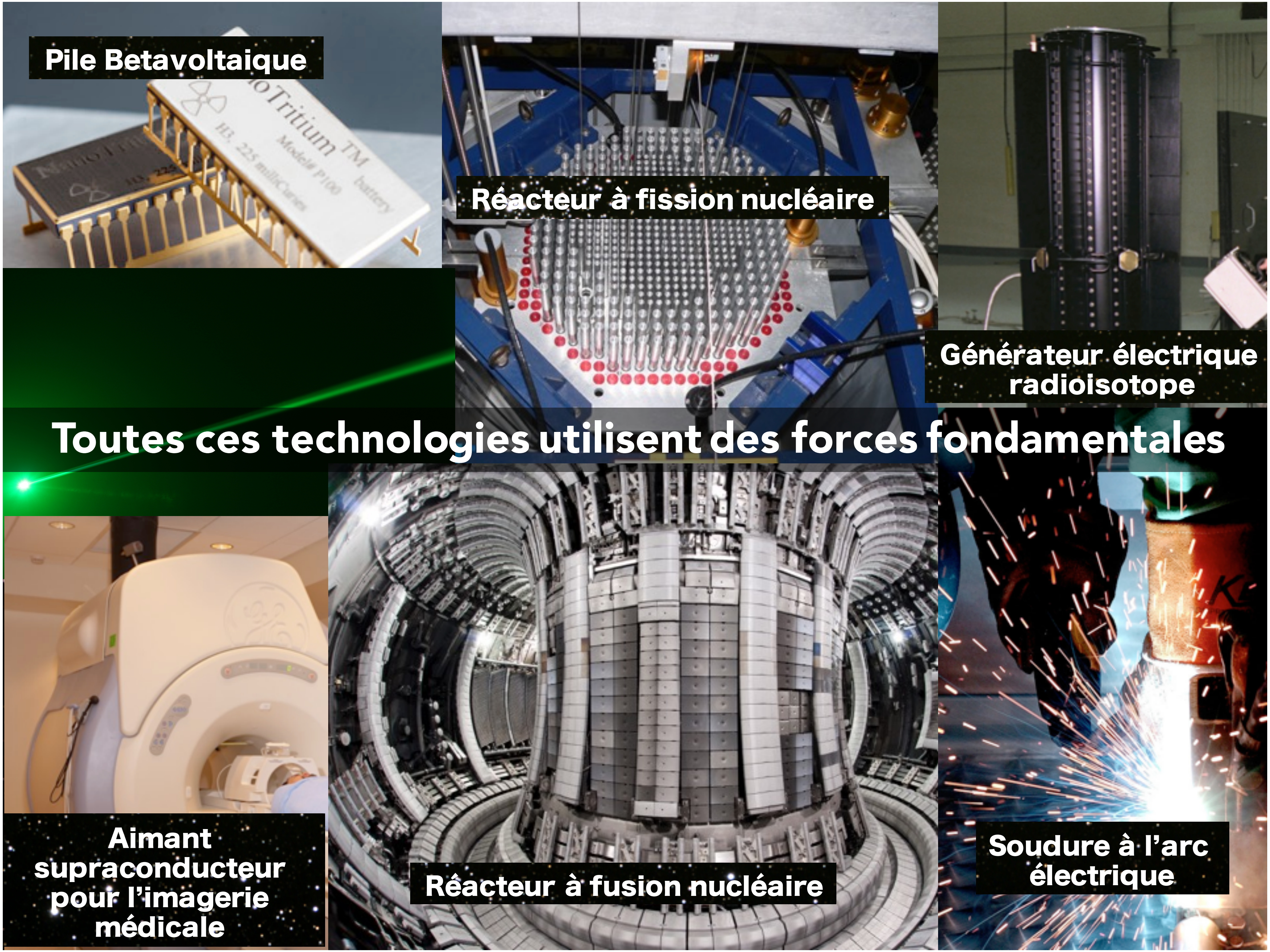
Comment courber l'espace-temps avec des électroaimants

André Füzfa
Université de Namur

UNIVERSITÉ DE NAMUR

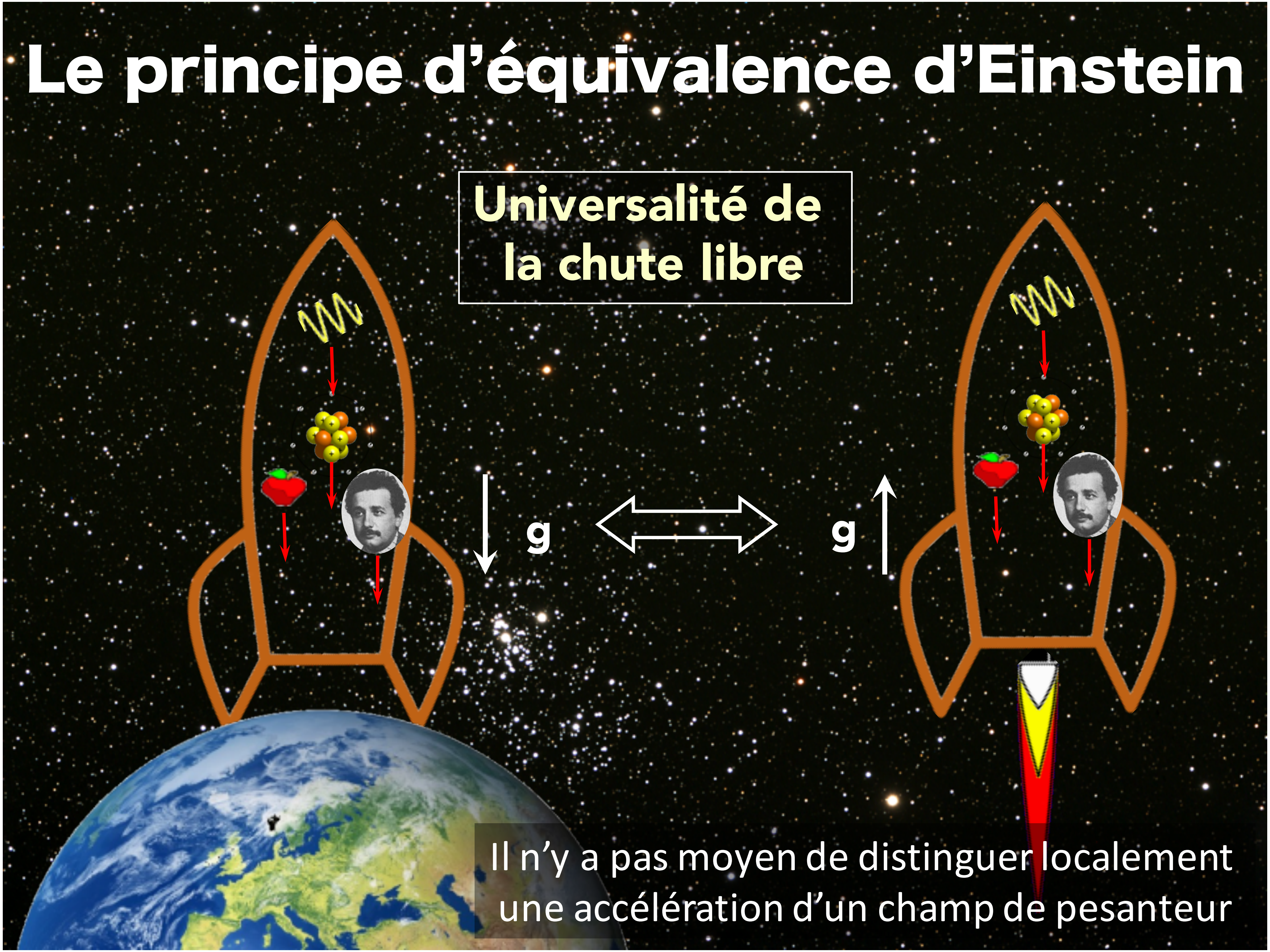
Basé sur Physical Review D 93, 024014 (2016)
arXiv:1504.00333


Pile Betavoltaique
Réacteur à fission nucléaire
Générateur électrique radioisotope
Toutes ces technologies utilisent des forces fondamentales
Aimant supraconducteur pour l'imagerie médicale
Réacteur à fusion nucléaire
Soudure à l'arc électrique


Les générateurs de gravité:
Une technologie de la science-fiction


Contact:
Machine à trous de vers
Star Wars: Hyperdrive
Superman:
Machine à gravité
Retour vers le futur:
Convecteur temporel
Star Gate SG1:
Porte des étoiles
Les Nouveaux Héros: portails
Star Trek: Générateur de gravité


Les générateurs de gravité
en relativité générale


Le principe d'équivalence d'Einstein
Universalité de la chute libre
g
g
Il n'y a pas moyen de distinguer localement une accélération d'un champ de pesanteur

La géométrisation de la gravité

★ Universalité de la chute libre: le mouvement est une propriété <u>géométrique</u>

★ Le champ gravitationnel est une matrice métrique

1 potentiel newtonien V $\Longrightarrow$ 10 potentiels relativistes $g_{\mu\nu}$

★ Quels sources pour le champ gravitationnel?

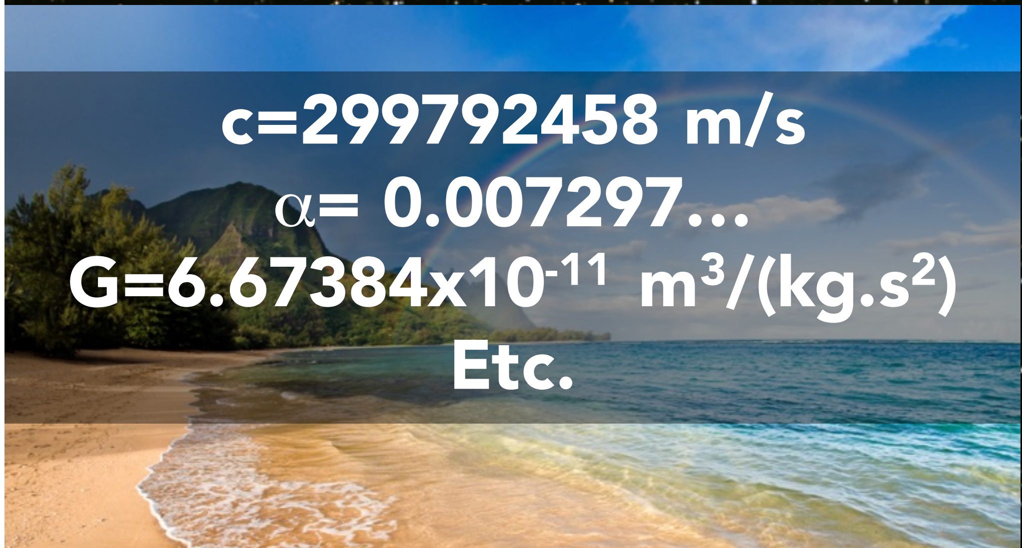
Gravitation de Newton: $\Longrightarrow$ Gravitation d'Einstein:

Masse d'inertie $\Longrightarrow$ Masse d'inertie +? pressions? De toutes sortes?

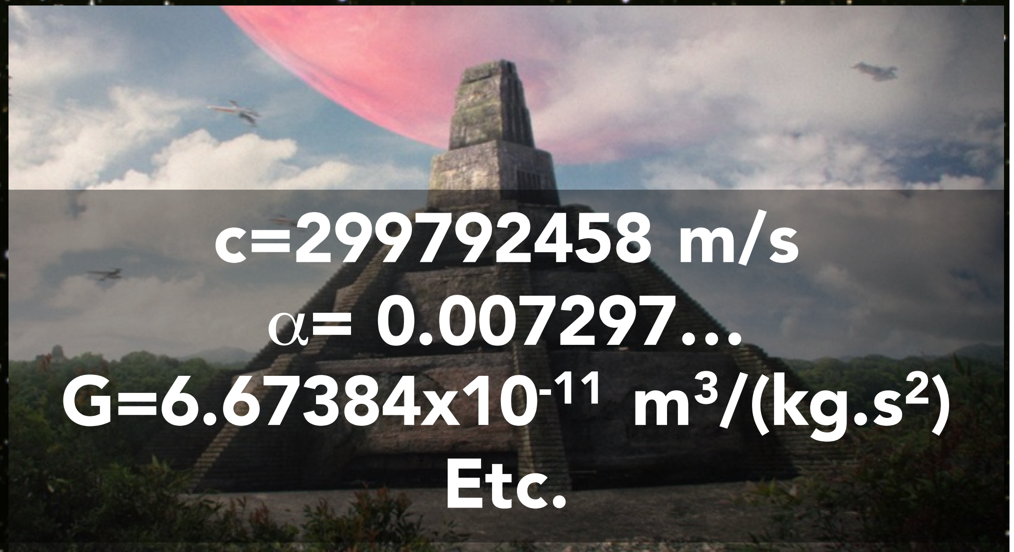
Invariance de position locale

Toute conclusion expérimentale valide doit pouvoir être reproduite indépendamment de la position et de l'époque

Sur Terre, aujourd'hui



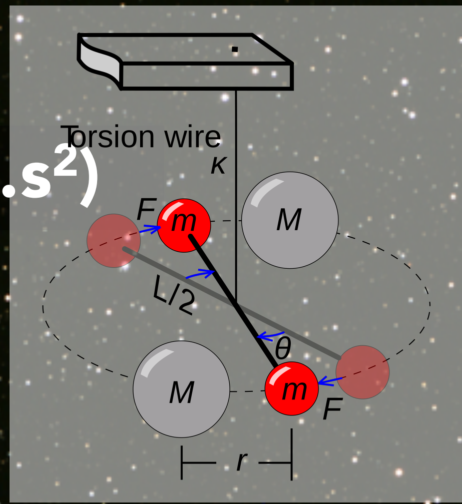
A long time ago,
In a galaxy far, far away



C'est aussi vrai pour la gravité!

Le principe d'équivalence fort

Expérience de Cavendish

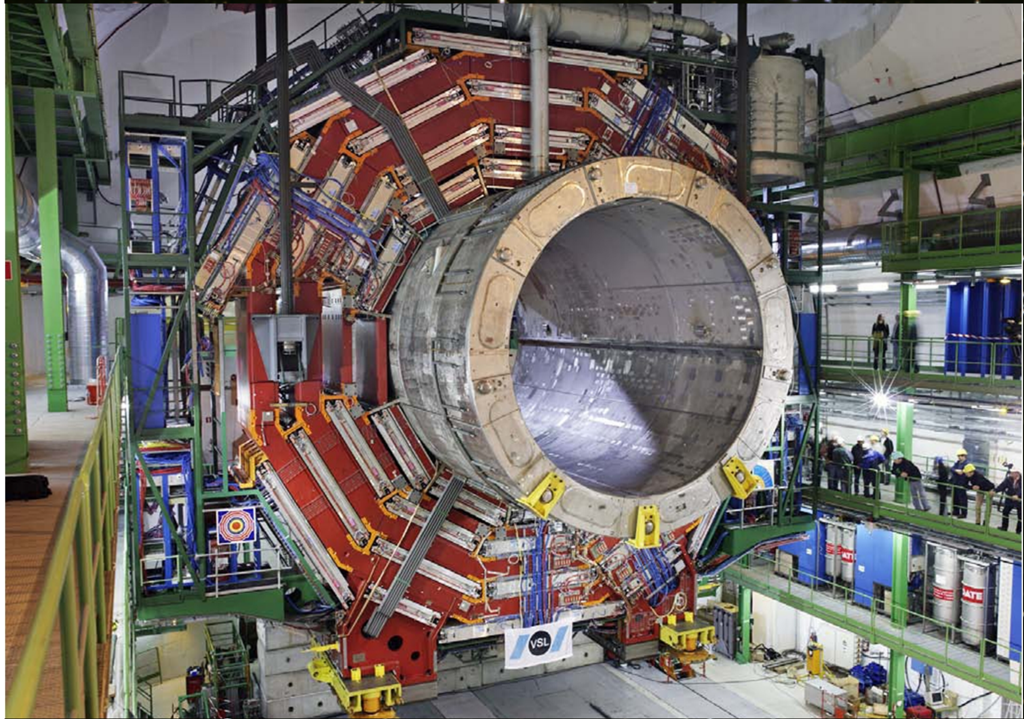
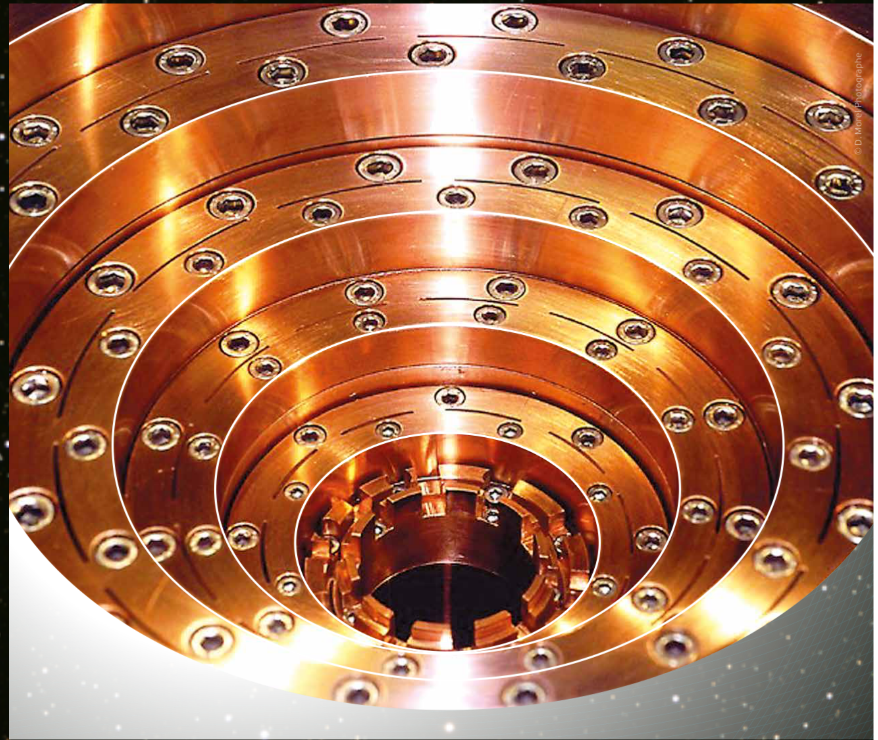


$G = 6.67384 \times 10^{-11}\ m^3/(kg.s^2)$

Les expériences gravitationnelles impliquent tous les types d'énergie de liaison

<u>Invariance de position locale:</u>

Tous les types d'énergie, y compris gravitationnelles, produisent de la gravitation avec la même intensité

Les générateurs de champ magnétique sont donc aussi des générateurs de gravité

Les équations d'Einstein de la relativité générale

★ Equations d'Einstein avec matière et électromagnetisme

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}_{\text{Courbure de l'espace-temps}} = \underbrace{-\frac{8\pi G}{c^4}\left(T^{(\mathrm{mat})}_{\mu\nu} + T^{(\mathrm{em})}_{\mu\nu}\right)}_{\text{Equivalence: Tout type d'énergie, avec la même intensité constante}}$$

★ Source électromagnetique:

$$T_{\mu\nu} \sim -\begin{pmatrix} \epsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0 & \overrightarrow{S}/c \\ \overrightarrow{S}/c & M_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

Tenseur énergie-impulsion Électromagnetique

Avec S le vecteur de Poynting et M le tenseur des contraintes de Maxwell

Les équations de Maxwell en espace-courbe

★ Quadri-potentiel électromagnetique (sgn(g)=(+,-,-,-)): $A^\mu = \left(V/c, \vec{A}\right)$

★ Tenseur de Faraday (F=dA): $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

★ Premier groupe des équations de Maxwell (par construction: dF=d^{2}A=0)

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{array}$$

★ Quadri-densité de courant: $J^\mu = \left(c\rho_Q, \vec{J}\right)$

★ Second groupe des équations de Maxwell

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \rho_Q/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \partial_t \vec{E} \end{array}$$

Dérivée covariante (courbure)

Le système Einstein-Maxwell (EM)

★ Equations d'Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{(\mathrm{mat})} + T_{\mu\nu}^{(\mathrm{em})} \right)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{em})} = -\frac{1}{\mu_0} \left(g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

Tenseur énergie-impulsion Électromagnetique

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Tenseur de Faraday

★ Pur système Einstein-Maxwell $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{mat})} = 0$

and

$$T^{(\mathrm{em})} = 0 \Rightarrow R = 0$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(\mathrm{em})}$$

Einstein equations

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

Maxwell equations with J^ν current density

Quelques résultats analytiques

★ Espace-temps avec des champs électriques/magnétiques uniformes:

→ Solutions statiques, à symétrie axiale et cosmologiques (globales) :

Levi-Civita,1917 ; Bertotti, 1959 ; Robinson, 1959 ; Bonnor, 1954 ; Melvin, 1964 ; Peblansky & Hacyan, 1979

→ Pas asymptotiquement plates

★ Le trou noir chargé:

→ Sans rotation : Reissner, 1916 and Nordström, 1918

→ En rotation: Kerr-Newman, 1965

→ Asymptotiquement plate

★ Fil rectiligne infini parcouru par un courant continu

→ Mukherjee, 1938 ; Witten, 1962

→ Pas asymptotiquement plates (divergence des champs de métrique à l'infini)

Quelques résultats analytiques

★ Théorème de Bonnor (1953):

→ Correspondance duale entre solutions électrostatiques et magnétostatiques solutions à l'extérieur des sources

→ Preuve de l'existence d'une solution pour les boucles de courant et comportement asymptotique partiel pour le dipôle magnétique

Des solutions asymptotiquement plates en symétrie axiale?

★ Boucles de courant en relativité générale (Bonnor, 1960):

→ Équations du champ et solution analytique particulière

★ Solénoïde infiniment long dans le régime en champ faible (Ivanov, 1994)

Solutions du système Einstein-Maxwell complet pour des boucles de courant et des solénoïdes portant des courants électriques arbitrairement grands?

Modéliser des électroaimants en relativité générale

★ Espace-temps axisymétrique en coordonnées cylindriques

★ Etant donné $J_\varphi(r,z)$, 3 inconnues: $A_\varphi=a(r,z)/r$, $g_{tt}(r,z)$; $g_{rr}(r,z)$

★ Phénoménologie des équations d'Einstein-Maxwell :

→ Courber l'espace-temps avec du magnétisme :

$$\nabla^2 g_{tt} \sim \frac{8\pi G}{c^4 \mu_0} B^2$$

$$\nabla^2 g_{rr} \sim \frac{8\pi G}{c^4 \mu_0} \left(B_z^2 - B_r^2\right)$$

Equations de Poisson sourcées Par les densités et les pressions magnétiques

→ Magnétisme en espace courbe:

$$\nabla^2 a \sim -r\mu_0 J_\varphi - \boxed{\vec{\nabla} a \bullet \vec{\nabla} g_{tt}}$$

$$\nabla^2_{(r,z)} = \partial_r^2 + \partial_r / r + \partial_z^2$$

Equations du champ

★ Choix de jauge pour la métrique et le potentiel EM :

$$ds^2 = c^2 e^{\rho(r,z)} dt^2 - e^{\lambda(r,z)} \left(dr^2 + dz^2\right) - e^{-\rho(r,z)} r^2 d\varphi^2$$

$$A = \frac{a(r,z)}{r} d\varphi$$

★ Equations d'Einstein:

$$\nabla^2_{(r,z)} \rho = \frac{8\pi G}{c^4 \mu_0} \boxed{\frac{e^\rho}{r^2} \left((\partial_r a)^2 + (\partial_z a)^2 \right)}$$

Densité d'énergie magnétique

$$\nabla^2_{(r,z)} \lambda + (\partial_z \rho)^2 = \frac{8\pi G}{c^4 \mu_0} \frac{e^\rho}{r^2} \left((\partial_r a)^2 - (\partial_z a)^2 \right)$$

★ Equation de Maxwell ($J = J^\varphi$):

Magnétisme sur espace courbre

$$\nabla^2_{(r,z)} a - \frac{2}{r} \partial_r a = \boxed{- (\partial_r a \partial_r \rho + \partial_z a \partial_z \rho)} - r \mu_0 J$$

$$\nabla^2_{(r,z)} = \partial_r^2 + \partial_r / r + \partial_z^2$$

Laplacien en espace plat!

L'équation de Maxwell en espace courbe

$$\nabla^2_{(r,z)} a - \frac{2}{r}\partial_r a = -\left(\partial_r a \partial_r \rho + \partial_z a \partial_z \rho\right) - r\mu_0 J$$

Décomposition du potentiel vecteur: $a = a_{\rm nr} + a_{\rm rel}$

★ Equation de Maxwell non-relativiste : (background plat ρ=λ=0)

$$\nabla^2_{(r,z)} a_{\rm nr} - \frac{2}{r}\partial_r a_{\rm nr} = -r\mu_0 J$$

★ Sources pour a_{nr}:

→ **Boucle de courant** : anneau infiniment mince (J~δ(z).δ(r-l))

→ **Solénoïde**: feuillet infiniment fin (J~δ(r-l) for z in [-L/2;L/2])

→ Solutions classiques en termes des fonctions elliptiques complètes de première, seconde et troisième espèces

→ peut aussi être obtenue par la loi de Biot-Savart

→ évite de devoir manipuler des sources ponctuelles

Equations du champ sans dimension

- ★ Boucle de courant de longueur l : u=r/l, v=z/l, a'= a /(μ_0 I l)
- ★ Solénoide de longueur L et de rayon l: v=z/L, a'= a /(μ_0 I nL l)
- ★ 3 EDPs non-linéaires elliptiques couplées adimensionnées

$$\nabla^2\rho = \mathcal{C}_I \frac{L^2}{l^2}\frac{e^\rho}{u^2}\left(\left(\partial_u(a_{\rm nr}+a_{\rm rel})\right)^2 + \frac{l^2}{L^2}\left(\partial_v(a_{\rm nr}+a_{\rm rel})\right)^2 \right)$$

$$\nabla^2\lambda + \frac{l^2}{L^2}\left(\partial_v\rho\right)^2 = \mathcal{C}_I \frac{L^2}{l^2}\frac{e^\rho}{u^2}\left(\left(\partial_u(a_{\rm nr}+a_{\rm rel})\right)^2 - \frac{l^2}{L^2}\left(\partial_v(a_{\rm nr}+a_{\rm rel})\right)^2 \right)$$

$$\nabla^2 a_{\rm rel} - \frac{2}{u}\partial_u a_{\rm rel} = -\left(\partial_u(a_{\rm nr}+a_{\rm rel})\partial_u\rho + \frac{l^2}{L^2}\partial_v(a_{\rm nr}+a_{\rm rel})\partial_v\rho \right)$$

★ Couplage magnétogravitationnel $\boxed{\mathcal{C}_I = \frac{8\pi G}{c^4}\mu_0 I_{\rm tot}^2 = 8\pi\left(\frac{I_{\rm tot}}{I_{\rm Pl}}\right)^2}$

Courant de Planck : $I_{\rm Pl} = \frac{c^2}{\sqrt{G\mu_0}} = 9.8169\times 10^{24}\,A$

Conditions de bord

- ★ Conditions de régularité en r=0: composantes radiales des gradients nulles sur l'axe
- ★ Platitude asymptotique : champ gravitationnel autour d'un dipôle magnétique:

$$\rho \sim \frac{\mathcal{C}_{\mathcal{I}}}{32}\frac{L^4}{l^4}\frac{v^2}{d^6}$$

Avec d la distance euclidienne

$$d = \left(u^2 + \frac{L^2}{l^2}v^2\right)^{1/2}$$

$$\lambda \sim \frac{\mathcal{C}_{\mathcal{I}}}{16}\frac{L^2}{l^2}\left[2\frac{u^2}{d^6} - \frac{L^2}{l^2}\frac{v^2}{2d^6} - \frac{9u^4}{4d^8}\right]$$

$$a_{\mathrm{rel}} \sim 0$$

- ★ Champs gravitationnels non monopolaires

Numerical method (1/2)

★ Relaxation method: $\nabla^2 \rho^{(n+1)} = S_1 \left[\rho^{(n)}, a_{\rm rel}^{(n)}\right]$, etc.

→3 PDEs for 3 unknowns: ρ, λ, a_{rel}

→Initial guess (n=0): non-relativistic solution

→at each step n, solve a set of linear inhomogeneous elliptic PDEs

→ stop when relative updates below tolerance threshold

★ Fourier decomposition with cosines (regularity conditions):

$$f(u,v) = \sum_{k=0}^{N} \hat{f}_k(u) \cos\left(\frac{k\pi}{V} v\right) \;;\; (u,v) \in [0,U] \times [-V,+V]$$

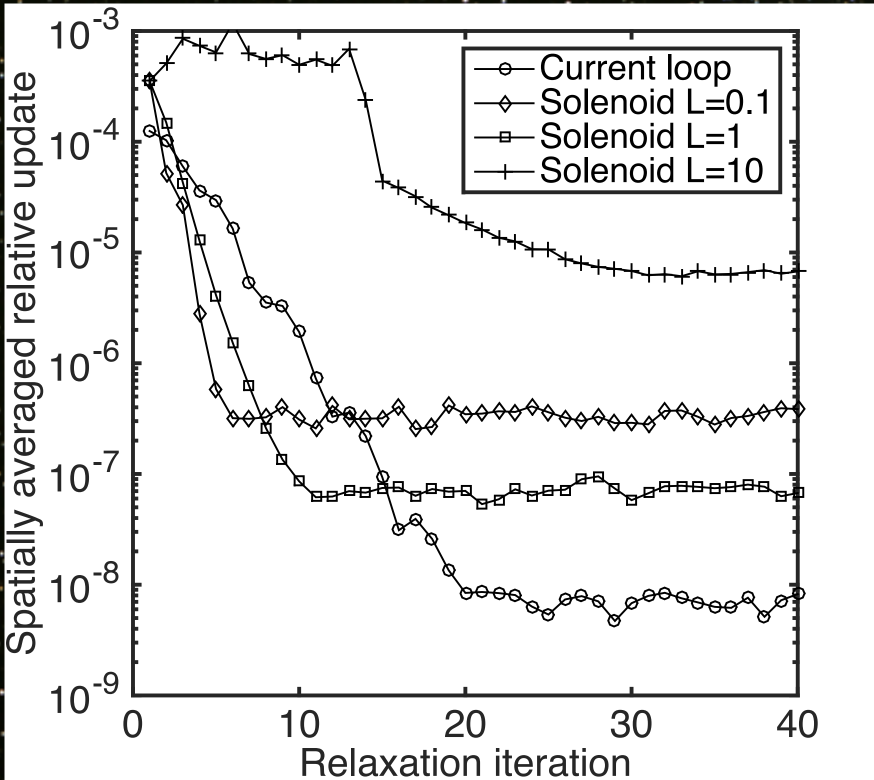
$$\hat{f}_k(u) = \frac{1}{V} \int_{-V}^{V} f(u,v) \cos\left(\frac{k\pi}{V} v\right) dv$$

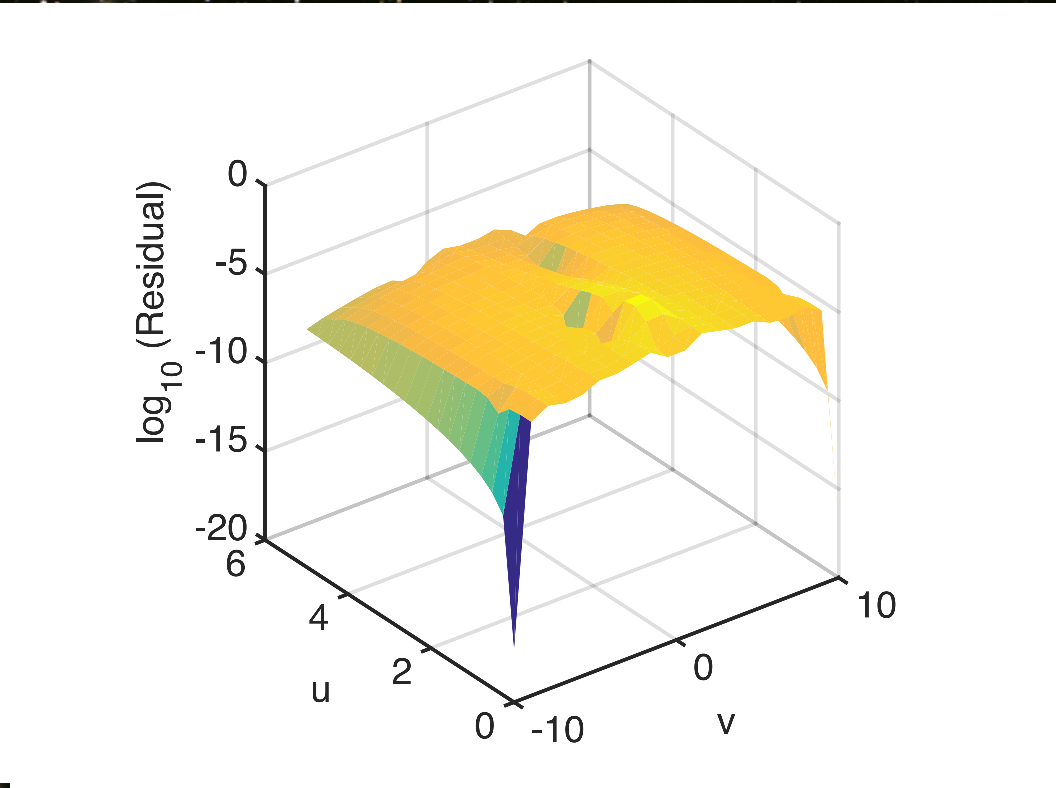
★ Boundary value problem for each Fourier mode at each step n:

$$\frac{d^2 \hat{\rho}_k}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\hat{\rho}_k}{du} - \frac{l^2}{L^2} \left(\frac{k\pi}{V}\right)^2 \hat{\rho}_k = \hat{S}_{k,1}(u)$$

Numerical method (2/2)

Convergence of the relaxation algorithm





Residual of off-diagonal Einstein equation

Courber l'espace-temps avec des électroaimants

★ Equations d'Einstein adimensionnées:

$$g_{rr} \sim g_{tt} \sim \boxed{\mathcal{C}_I = \frac{8\pi G}{c^4}\mu_0 I_{\rm tot}^2 = 8\pi\left(\frac{I_{\rm tot}}{I_{\rm Pl}}\right)^2}$$

Couplage magnéto-gravitationnel

Courant de Planck: $$I_{\rm Pl} = \frac{c^2}{\sqrt{G\mu_0}} = 9.8169 \times 10^{24}\,A$$

★ Analogue à la compacité pour les objets avec masse d'inertie:

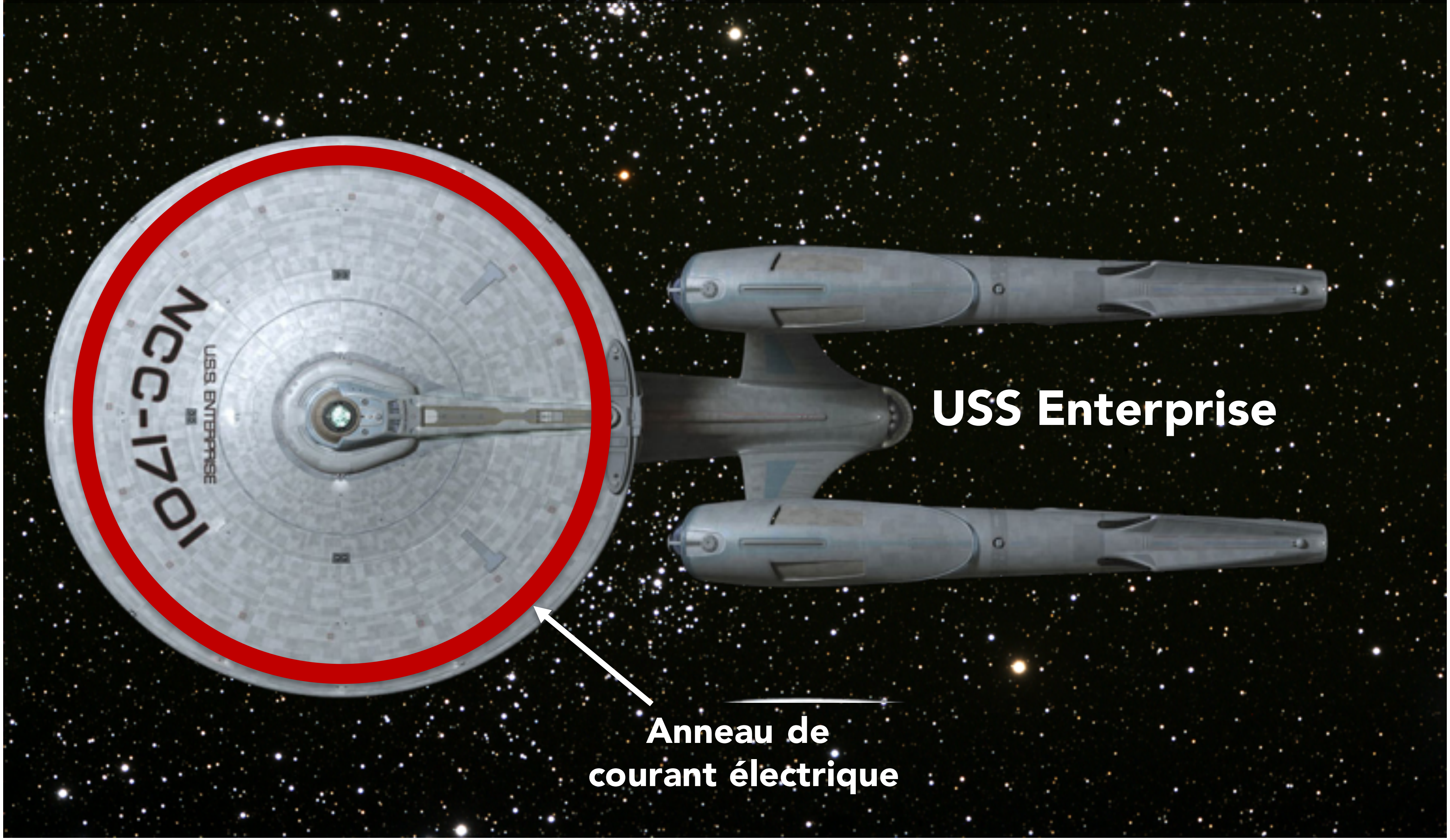
$$g_{rr} \sim g_{tt} \sim s = \frac{GM}{c^2 R}$$

L'échelle de l'aimant n'intervient pas directement! (invariance conforme)

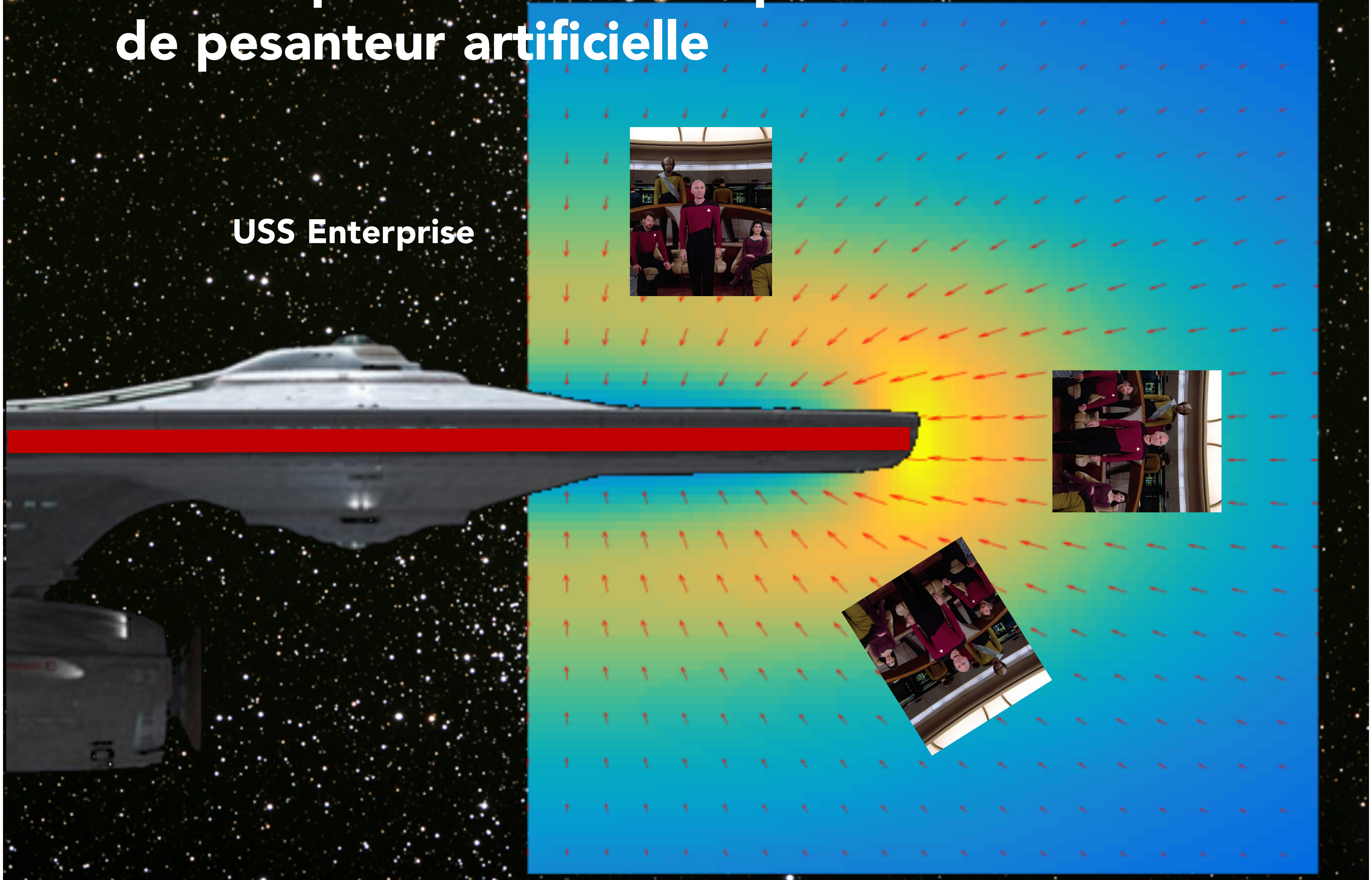
Les seuls champs gravitationnels que l'on peut espérer générer seront extrêmement faibles!

$$\mathcal{C}_I \sim \left(\frac{I_{\rm tot}}{10^{25}\,A}\right)^2$$

Starfleet utilise-t-il des générateurs magnéto-gravitationnels ?

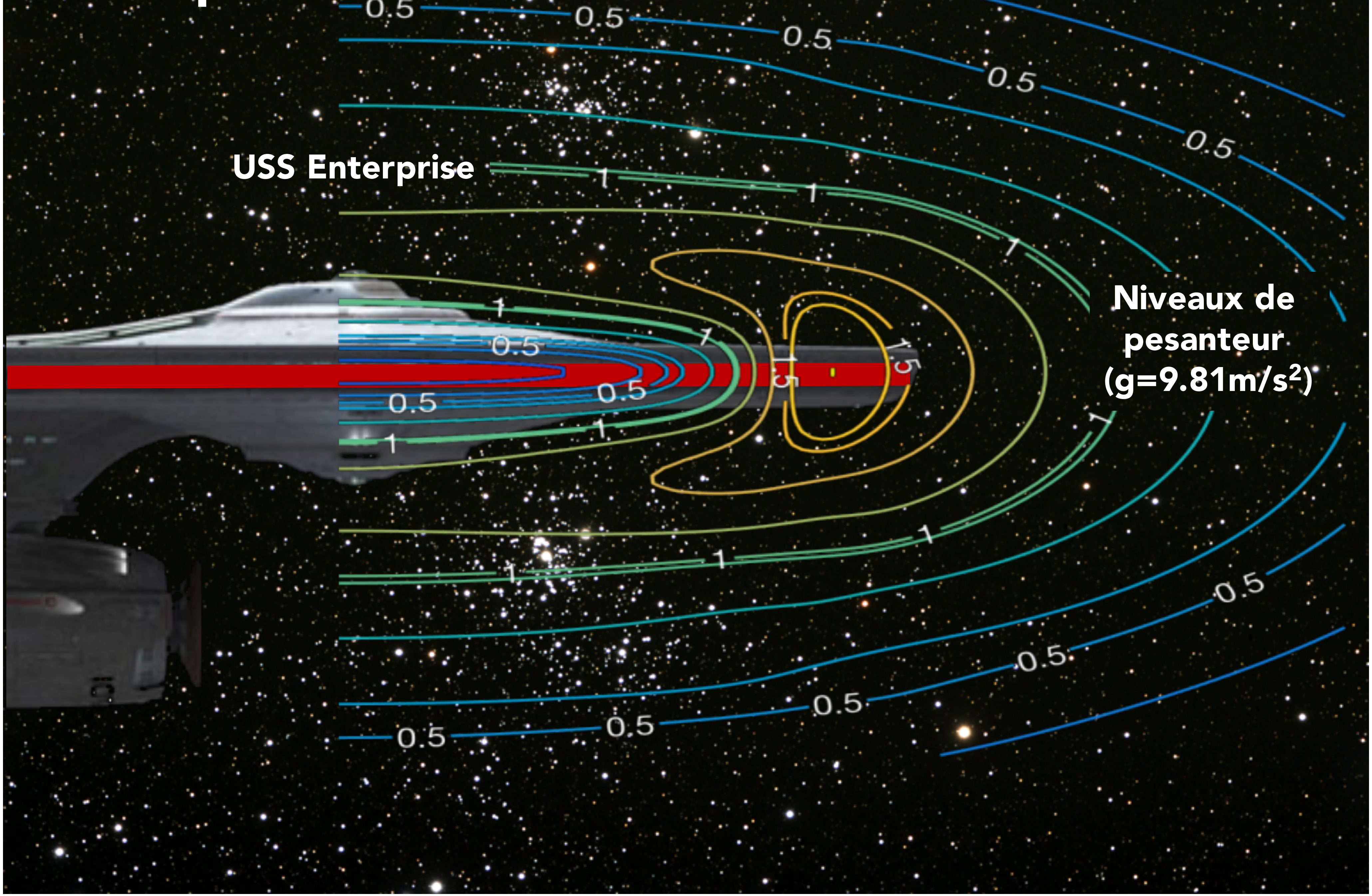


L'USS Enterprise et son champ de pesanteur artificielle



Calculs basés sur Physical Review D 93 024014 (2016)

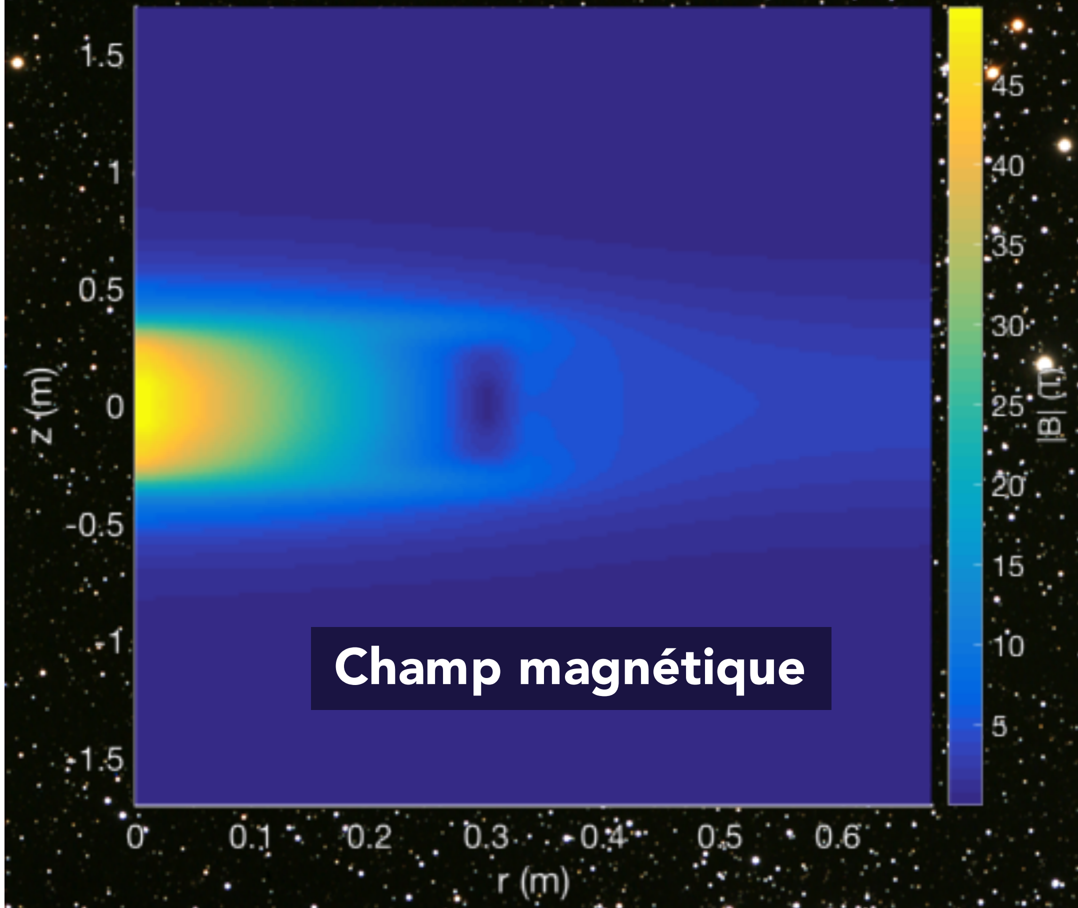
L'USS Enterprise et son champ de pesanteur artificielle



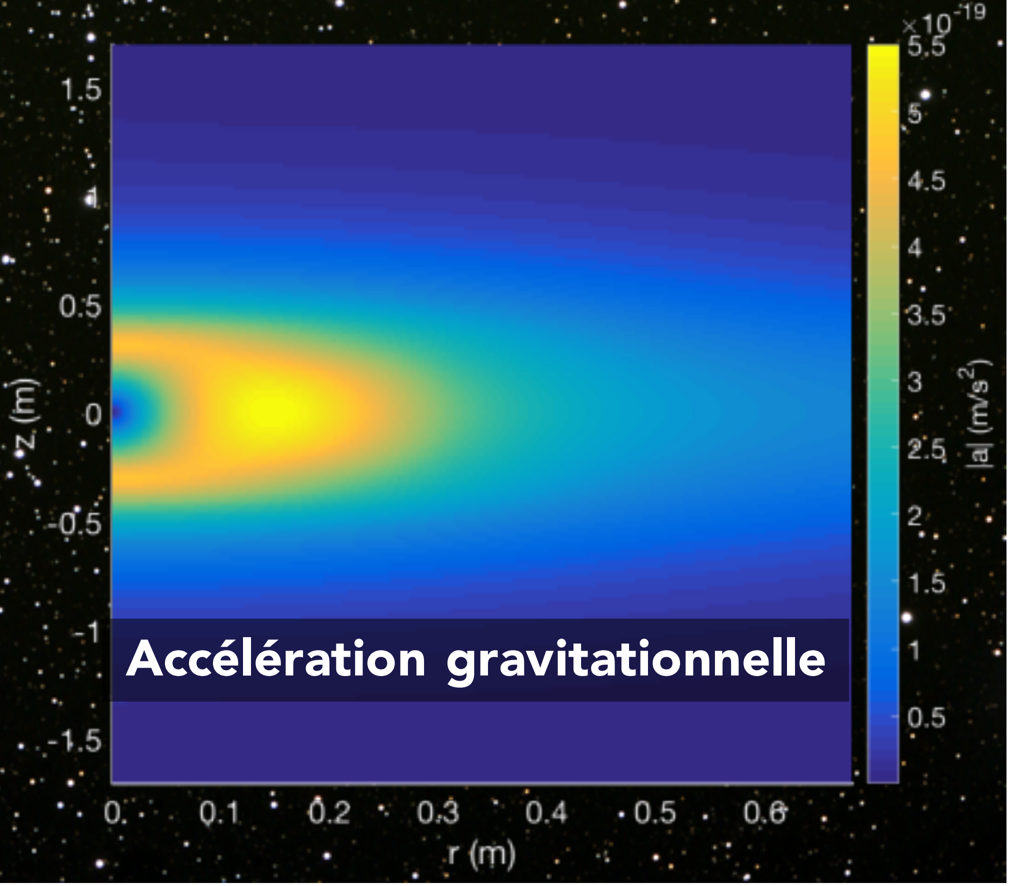
Star Trek en relativité générale

Pour un générateur de 1g de 500 m de diamètre:

- Intensité totale du courant: 10^{17} Ampères
- Champ magnétique ~10^{9} T

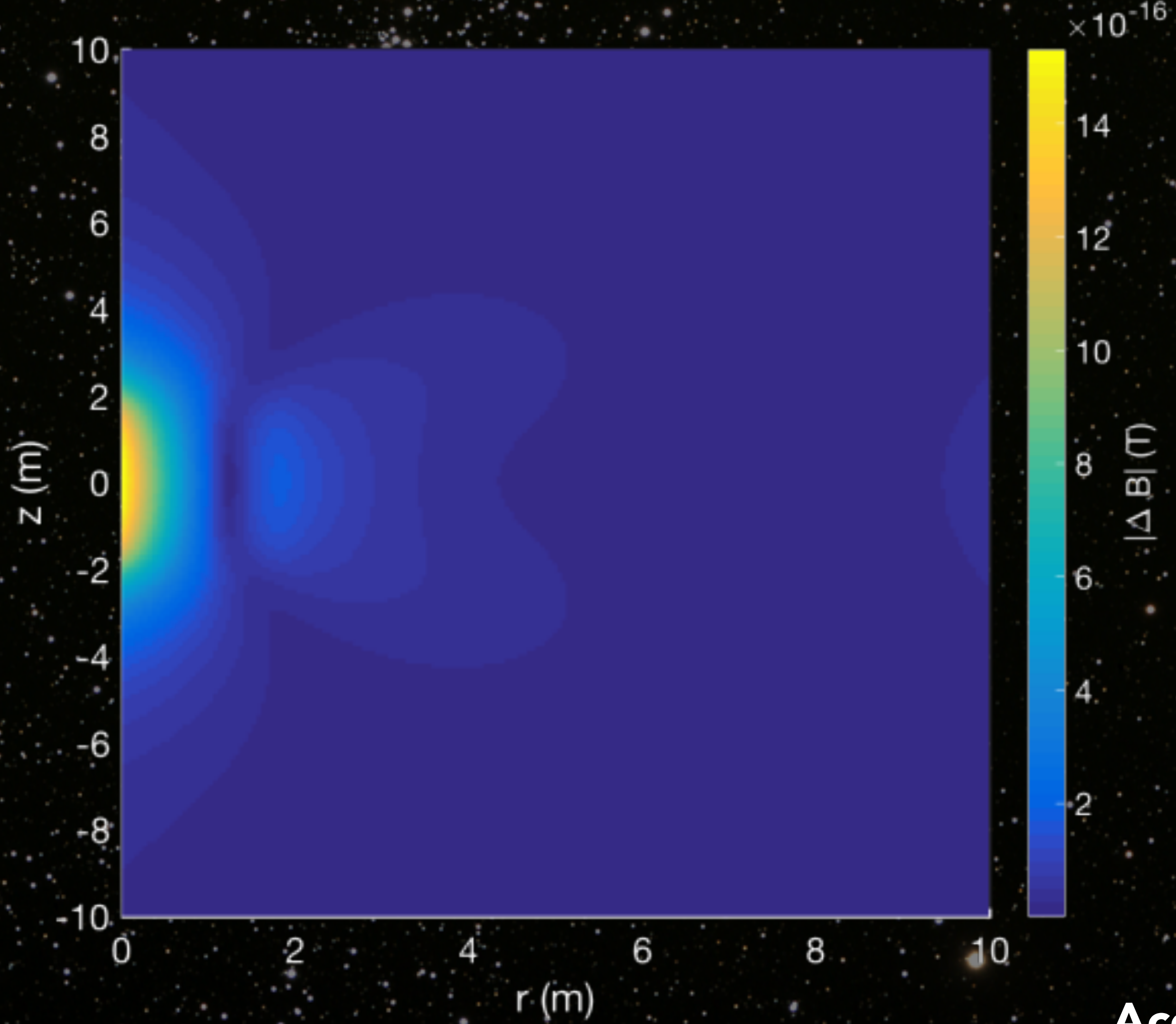


Aimant:
l=350 mm
L=700 mm
B_0=50T



Magnétisme sur espace courbe

★ Les champs magnétiques ressentent le champ de pesanteur terrestre

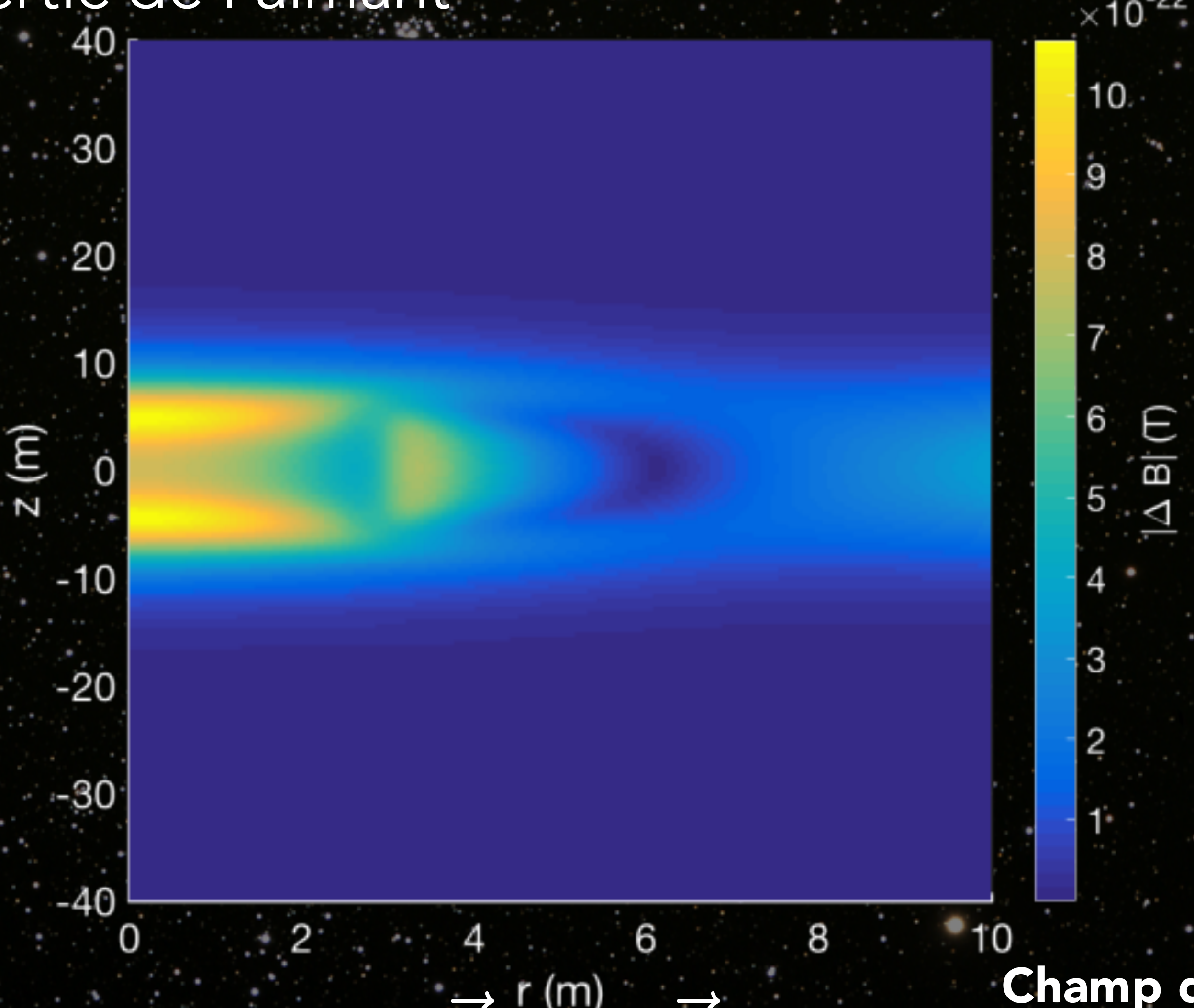


$$\nabla^2 a \sim -r\mu_0 J_\varphi - \vec{\nabla} a \bullet \vec{\nabla} g_{tt}$$

Accélération de pesanteur

Magnétisme sur espace courbe

★ Le champ magnétique ressent le champ de pesanteur dû à la masse d'inertie de l'aimant



$$\nabla^2 a \sim -r\mu_0 J_\varphi - \vec{\nabla} a \bullet \vec{\nabla} g_{tt}$$

Champ de pesanteur permanent de l'aimant

Détection de champs gravitationnels artificiels

★ Défi expérimental: $\mathcal{C}_I \sim \left(\frac{I_{\rm tot}}{10^{25} A} \right)^2$

★ Effets sur la lumière:

→ le champ magnétique affecte classiquement la lumière via la courbure de l'espace-temps qu'il génère

→ Effet Einstein: décalage en fréquence gravitationnel

→ Décalage de phase (ou time delay - Shapiro effect)

→ Polarisation

→ Déflexion

★ Autre canaux possibles (directs ou indirects):

→ Déflexion de particules neutres

→ Rayonnement synchrotron

→ Effet Aharonov-Bohm

→ Interférométrie atomique/neutronique

Détection interférométrique

★ Décalage de phase de la lumière (« Shapiro effect »)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}\int_\gamma h_{\mu\nu}K^{(0)\nu}dx^\mu = \frac{\pi}{\Lambda}\int_0^{\mathcal{L}} \left(h_{tt}(0,z) - h_{rr}(0,z)\right) dz$$

→ $h_{\mu\nu}$: métrique perturbée; K^ν: vecteur d'one non perturbé ; Λ: longueur d'onde

★ Observable cumulative le long de la trajectoire: amplification dans des cavités optiques

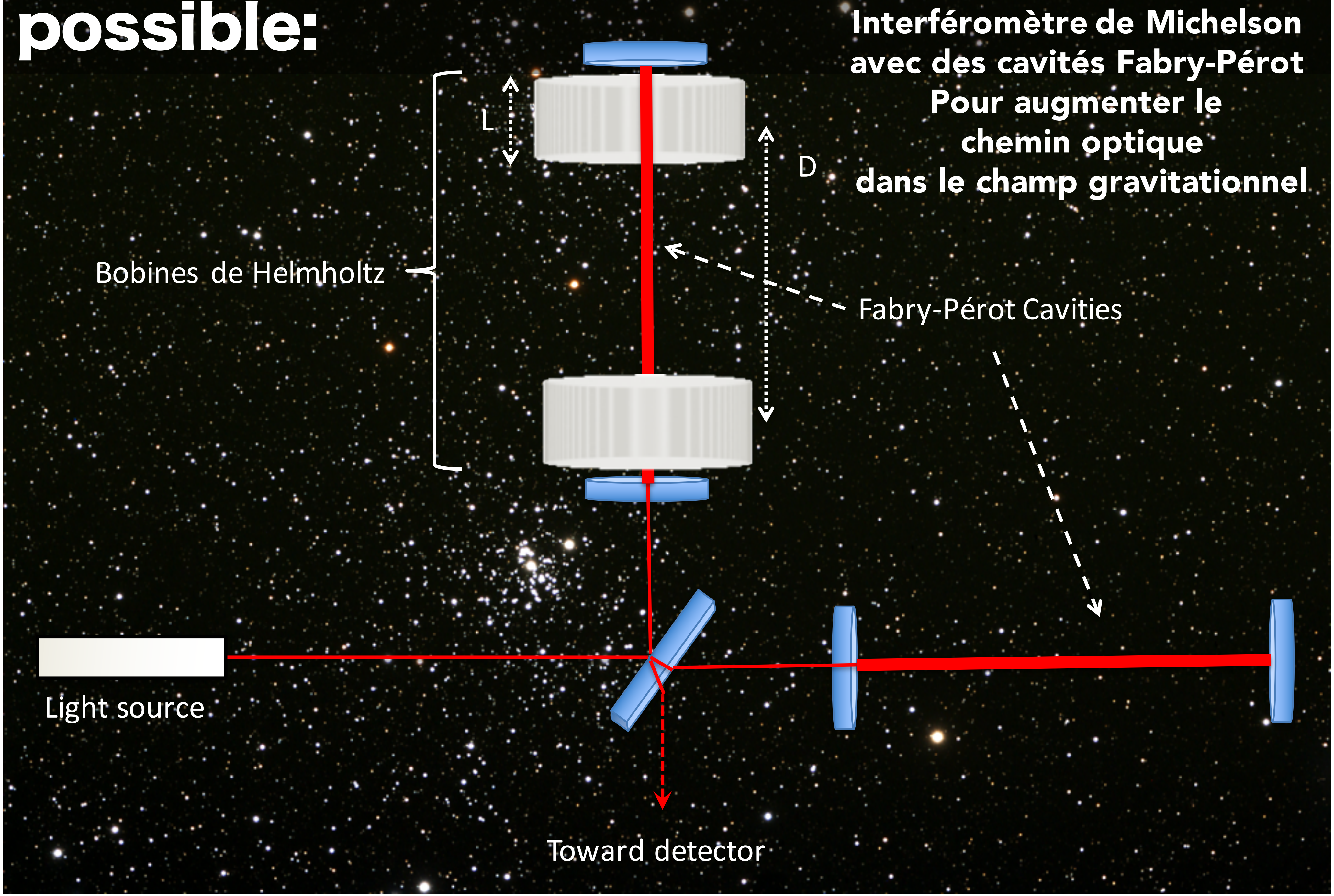
★ Même observable que pour la détection d'ondes gravitationnelles

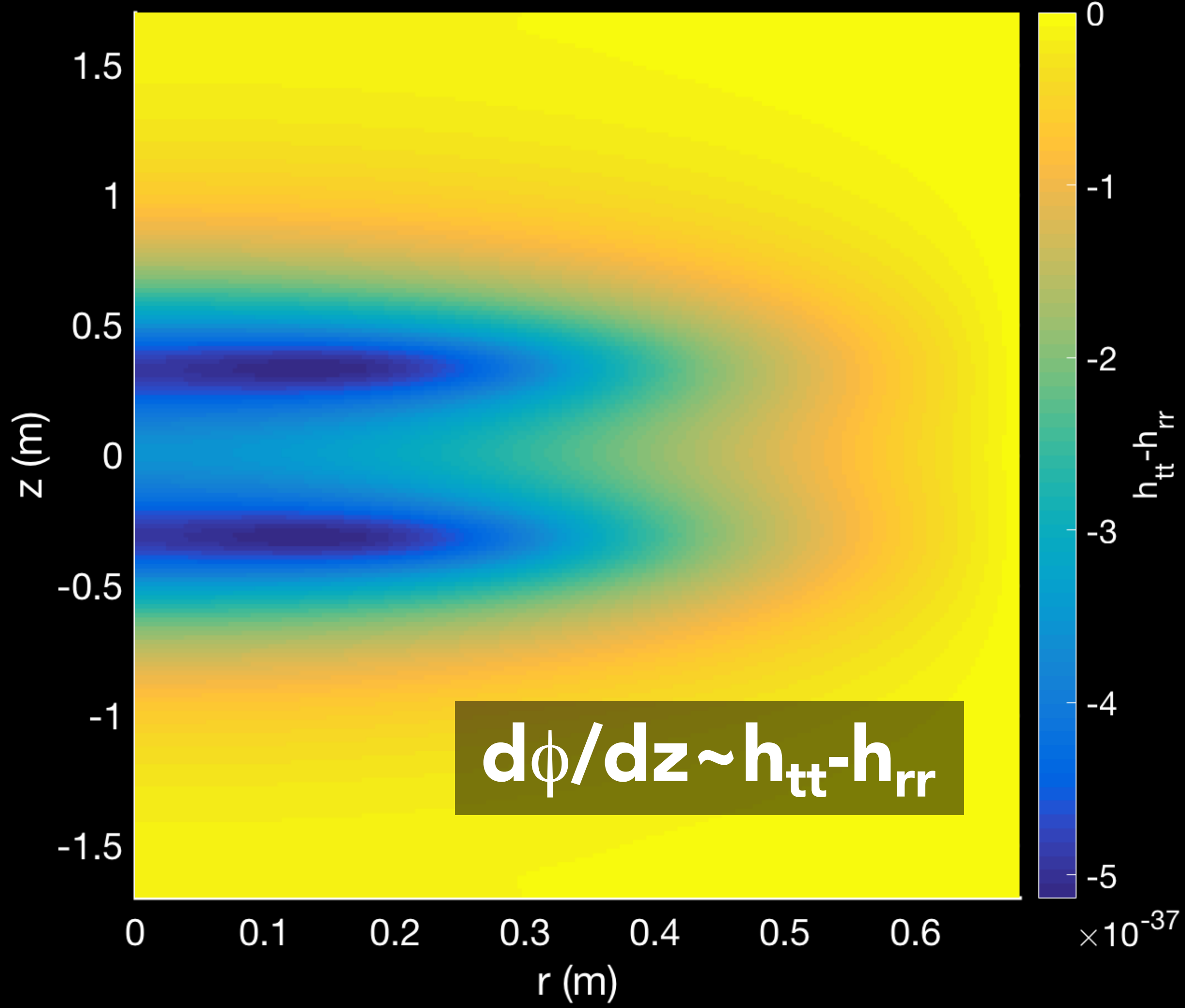
★ Influence de la géométrie de l'aimant:

$$\nabla^2 \left(h_{tt} - h_{rr}\right) \sim \frac{8\pi G}{c^4\mu_0}|B_r|^2$$

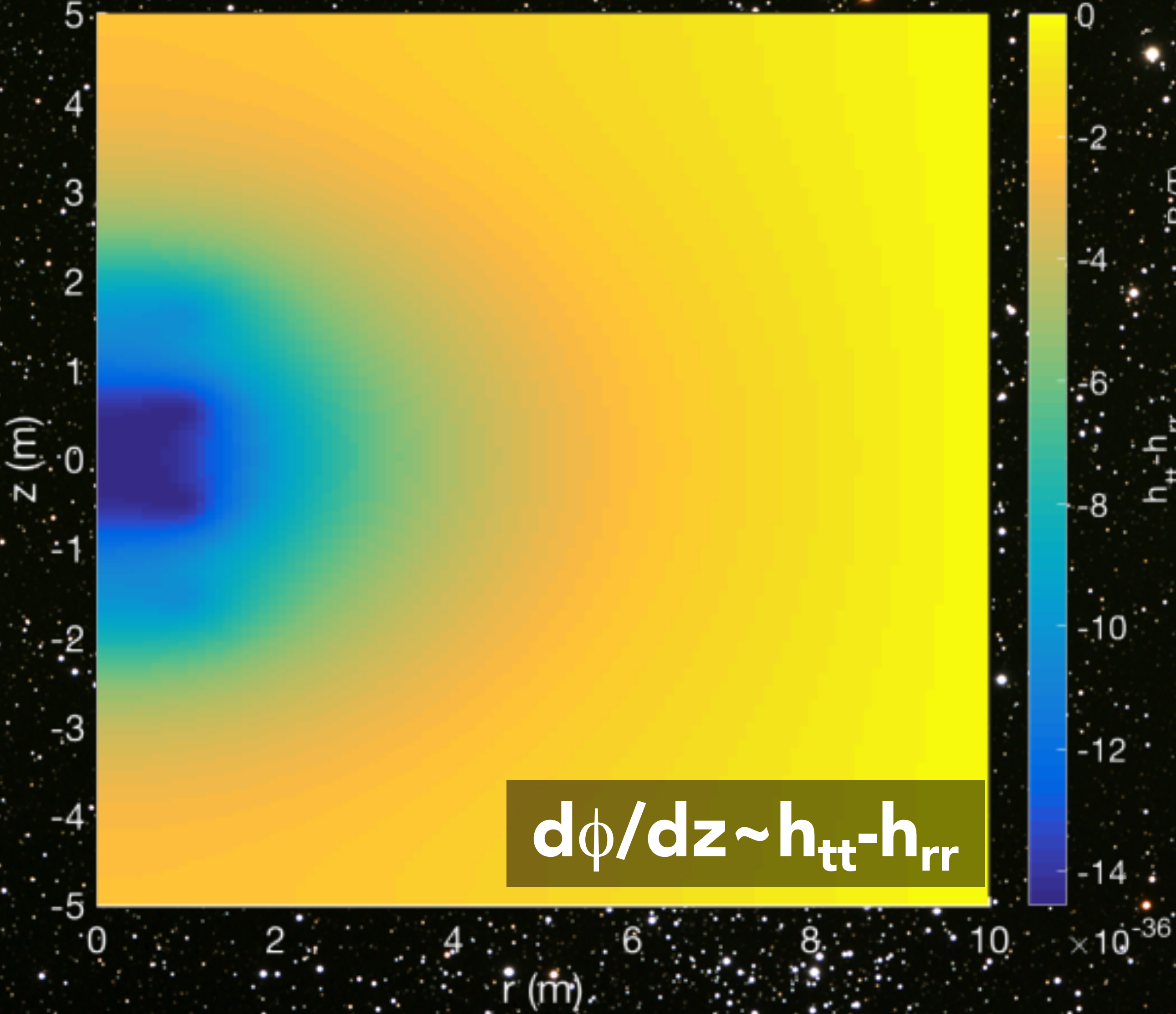
★ Compromis à trouver entre l'amplitude générée et le seuil de détection

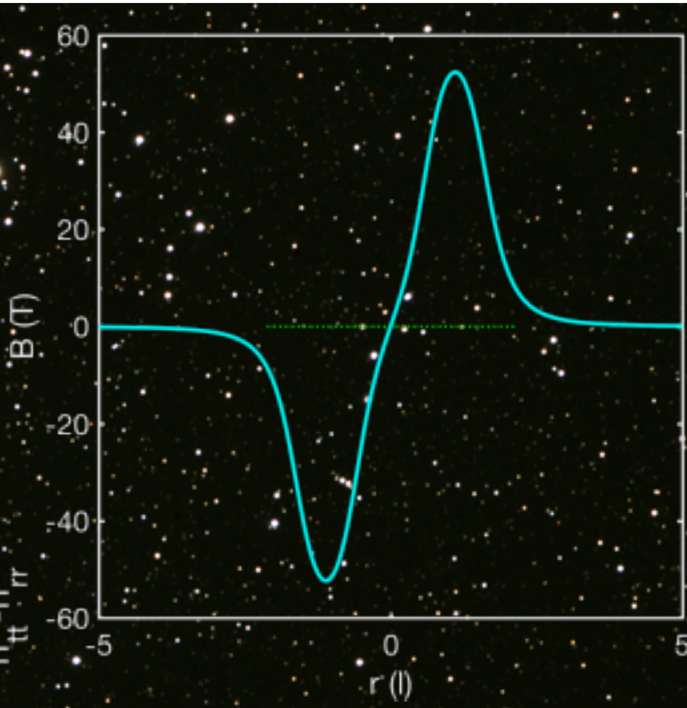
Un dispositif expérimental possible:





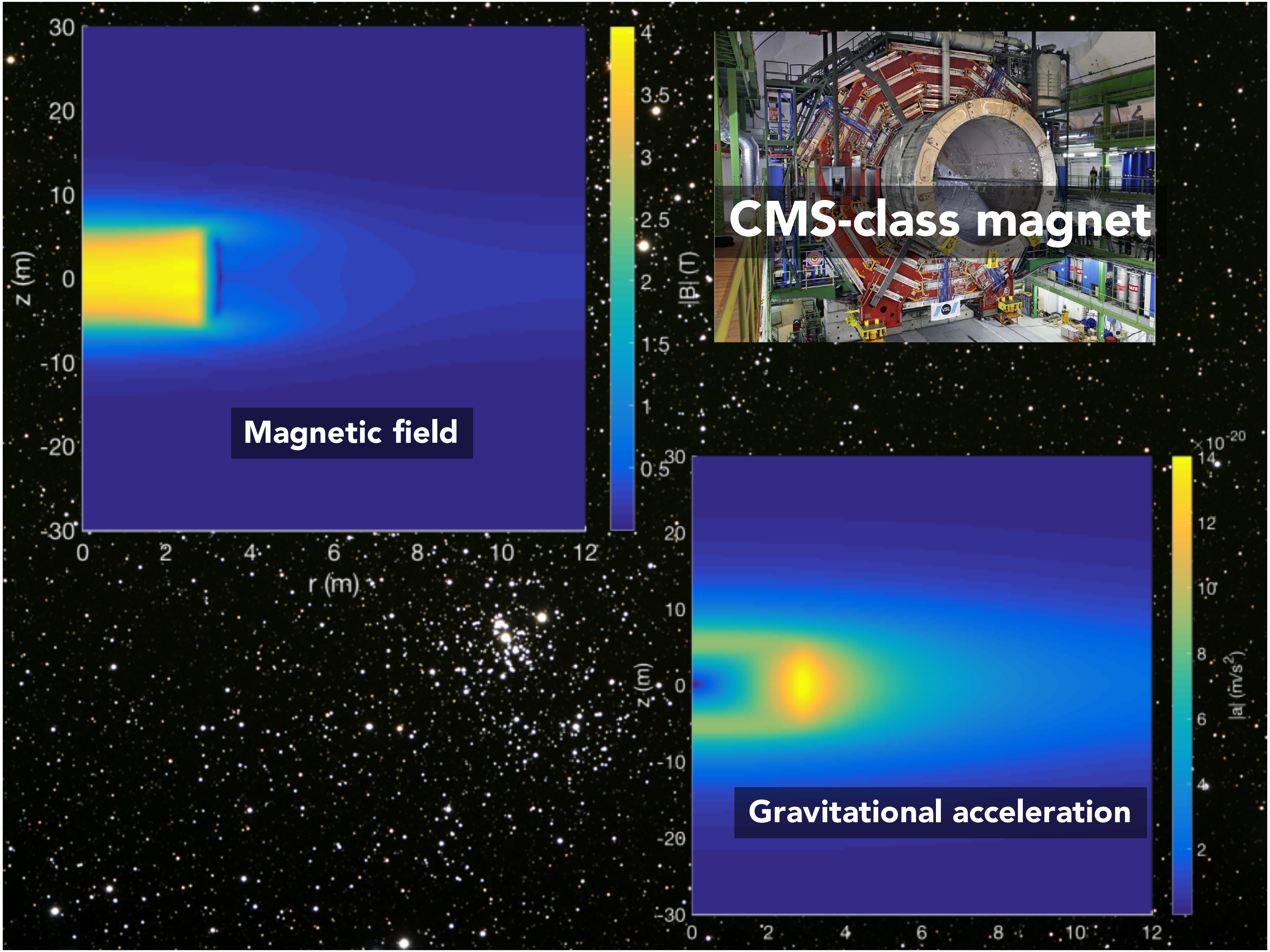
Dépend de la géométrie de l'aimant





Magnets:
l=350 mm
L=700 mm
B_0=50T

Anti-Helmholtz coil



CMS-class magnet
Magnetic field
z (m)
r (m)
|B| (T)
Gravitational acceleration
z (m)
|a| (m/s2)
×10-20

Application : nouveau test de la relativité générale

★ Tests astrophysiques :

→ Solar system (Shapiro effect, perihelion shift and ephemerides)

→ Lunar laser ranging

→ Neutron star physics

→ Compact binary systems & Pulsar timing

→ Cosmology: Big Bang Nucleosynthesis, Cosmic Microwave Background

→ Quasars absorption spectra

→ Stellar constraints

→ Gravitational waves

→ Supermassive black holes

Application : nouveau test de la relativité générale

★ Laboratory and space tests:

→ Eötvös experiments (torsion pendulum)

→ Oklo natural nuclear reactor and meteorite dating

→ Atomic clocks and maser

→ Universality of free fall of test masses, atoms, photons

→ Neutron interferometry (Colella-Overhauser-Werner experiments)

→ atomic interferometry

→ frame dragging

Masse d'inertie ou champ gravitationnel terrestre

★ La plupart des tests de la RG sont basés sur

→ les énergies de liaison de systèmes composites

→ des champs gravitationnels permanents créés par les masses d'inertie

★ Les champs magnétiques intenses :

→ test spécifique exclusivement sur la gravitation et l'électromagnétisme

→ matière relativiste (cf. intérieur des étoiles à neutrons)

→ des champs gravitationnels non permanent

Exemple : théorie de Kaluza-Klein

★ « Unification » gravitation-électromagnétisme:

→ Kaluza-Klein (1920s): compactification d'une dimension supplémentaire

$$\bar{g}^{(5)}_{AB} = \begin{pmatrix} g^{(4)}_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\mu & \phi^2 \end{pmatrix}$$

→ Dilaton ϕ: variation du couplage gravitationnel et électromagnétique

→ Caractéristique commune aux limites basse énergie des (nombreuses) théories des cordes compactifiées

★ Fortes contraintes d'origine gravitationnelle sur la masse du dilaton

★ Pas de contraintes impliquant l'électromagnétisme uniquement

→ pas un problème de magnétostatique mais un problème de RG mais à 5D

Electroaimants en théorie de Kaluza-Klein

★ Phénoménologie

$$\nabla^2 g_{tt} \sim \vec{\nabla} g_{tt} \bullet \vec{\nabla} \phi$$

$$\nabla^2 g_{rr} \sim \phi^2 B_r^2$$

Modified Poisson equations

$$\nabla^2 \phi \sim \phi^2 B^2$$

Dilaton equation

Loi d'Ampère dans la théorie de Kaluza-Klein :

$$\nabla^2 a \sim \boxed{-\frac{r^2}{l}\mu_0 J_\varphi} - \vec{\nabla} a \bullet \vec{\nabla}(g_{tt} + \phi)$$

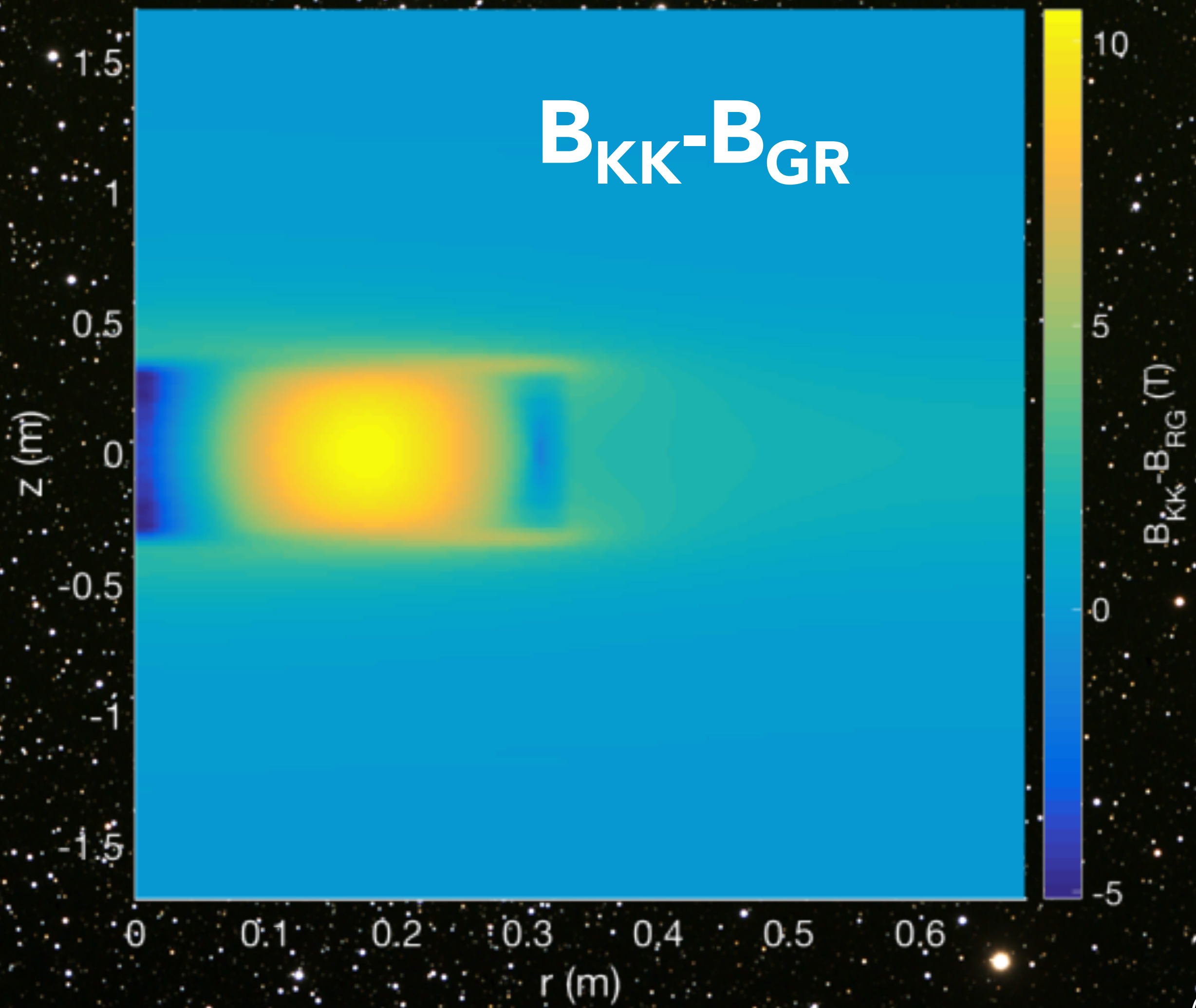
no conformal invariance

Loi d'Ampère en relativité générale

$$\nabla^2 a \sim -r\mu_0 J_\varphi - \vec{\nabla} a \bullet \vec{\nabla} g_{tt}$$

Kaluza-Klein vs General relativity

Test de la loi d'Ampère

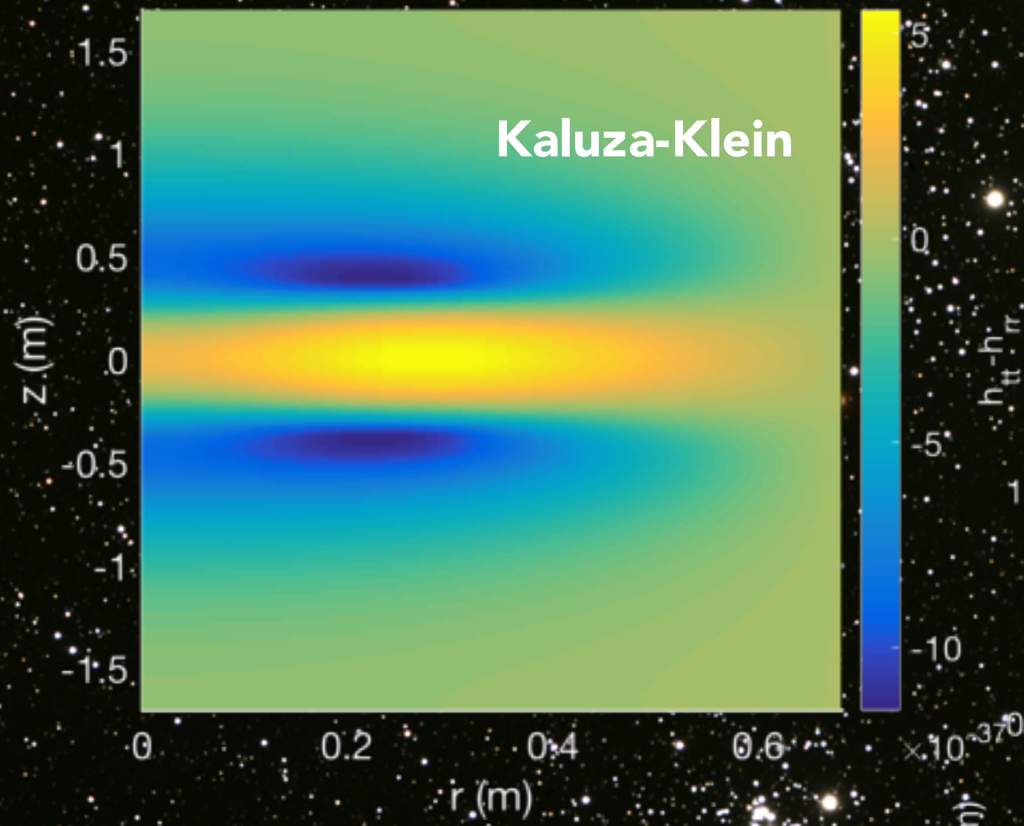


Preliminary results

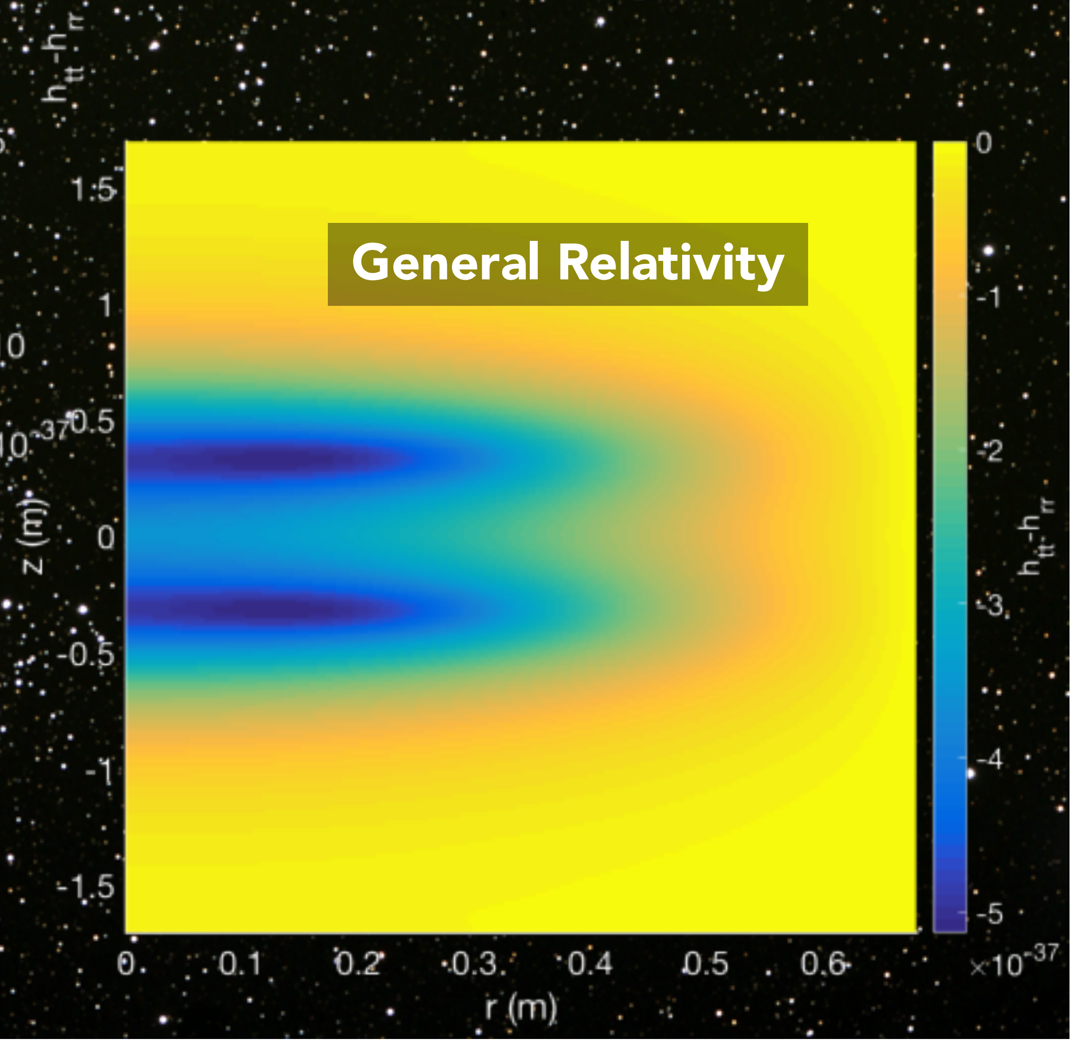
The magnetic field generated by the current depends on the theory!

$$\nabla^2 a \sim -\frac{r^2}{l}\mu_0 J_\varphi$$

Kaluza-Klein vs General relativity

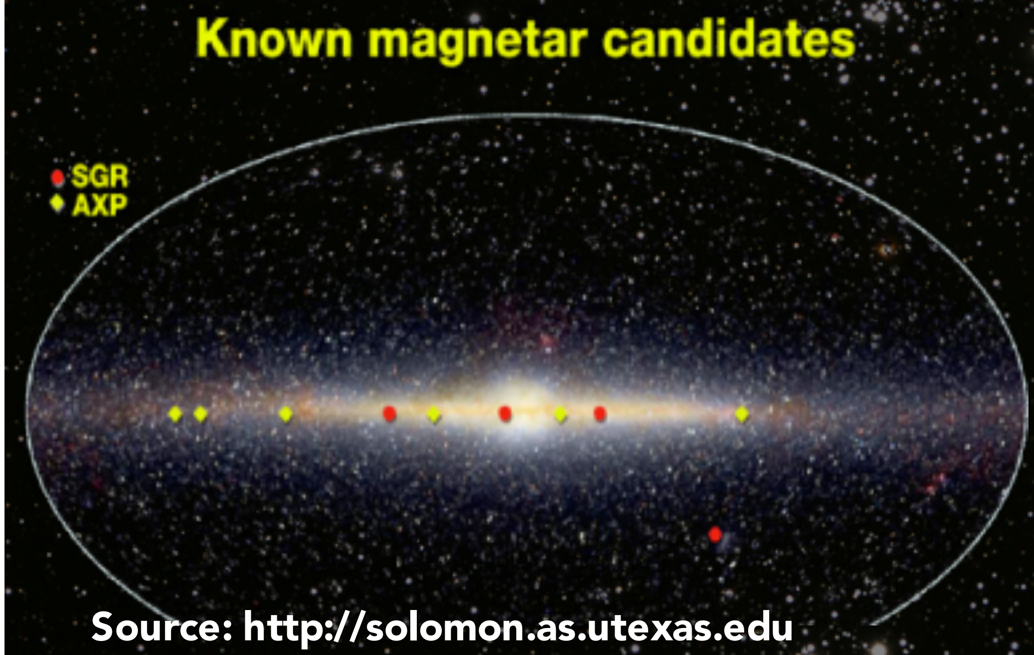


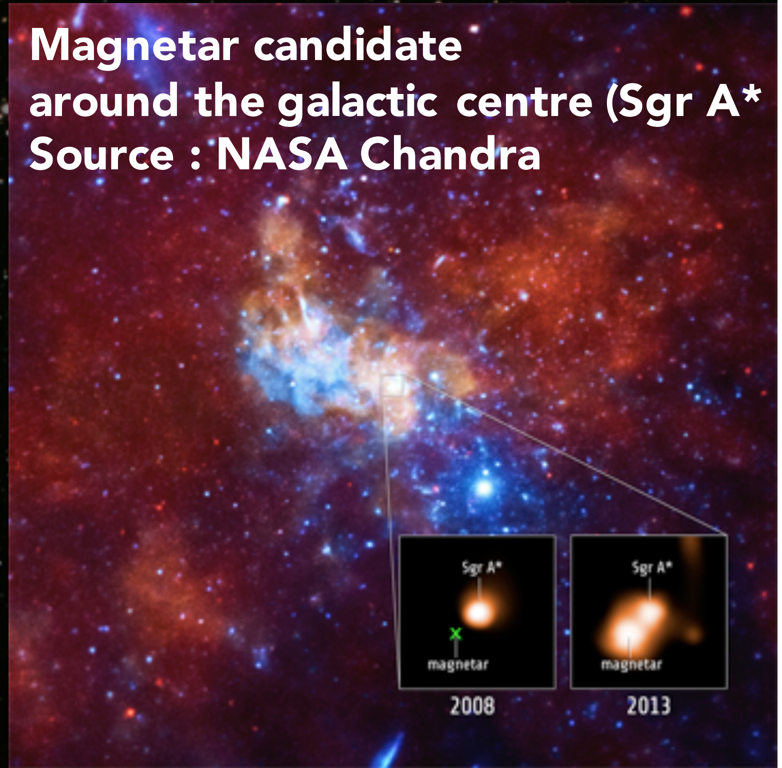
$d\phi/dz \sim h_{tt}-h_{rr}$



Application to astrophysics : magnetars

★ Neutron stars with ultra-strong magnetic fields ($B \sim 10^{8}$-10^{11} T)



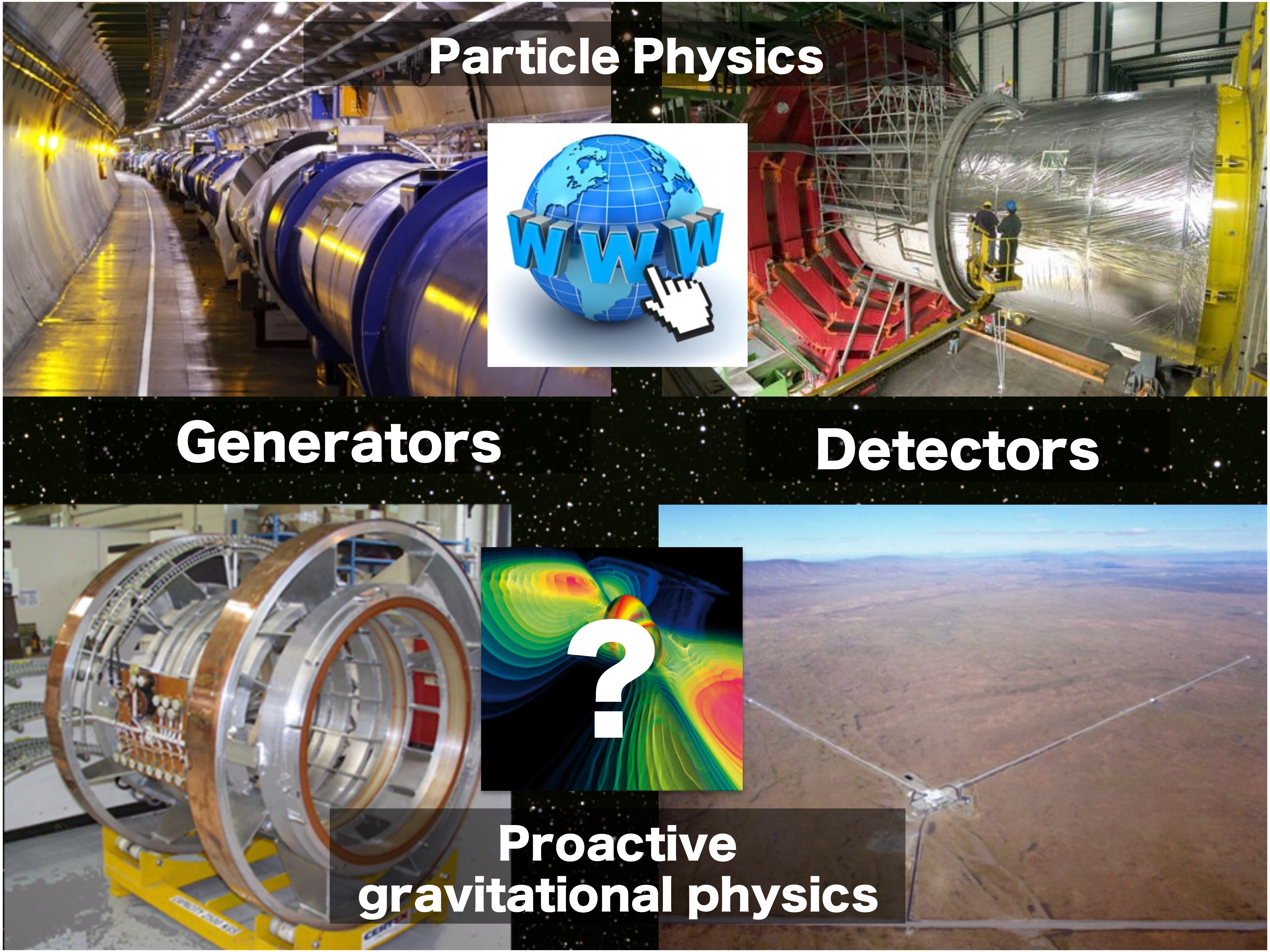


★ Additional spacetime curvature due to magnetic energy will contribute to gravitational lensing and quantum effects on polarization

★ For R~20km, magneto-gravitational coupling $C_l \sim 10^{-12} - 10^{-6}$

Effets gravitationnels dans les électroaimants

- ★ Tests précis de la loi d'Ampère dans des théories alternatives:
  - → dimensions supplémentaires, coupling photon-dilaton, Born-Infeld, etc.
- ★ Etude de faisabilité pour la génération-détection de champs gravitationnels:
  - → Time delay, Phase shift
- ★ Couplage laser de haute puissance et électroaimants
  - → Effet Gertsenshtein-Zeldovich : production résonante d'ondes gravitationnelles dans un champ magnétique intense
  - → Détection indirecte d'ondes gravitationnelles générées artificiellement
- ★ Applications:
  - → nouveaux tests du principe d'équivalence
  - → Physique des magnétars
  - → Banc de test pour des détecteurs d'ondes gravitationnelles


Particle Physics
Generators
Detectors
?
Proactive
gravitational physics