Festival d'Astronomie de Fleurance

Une introduction qualitative à la physique des trous noirs et à la relativité générale

Aurélien BARRAU
Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie (CNRS-IN2P3)
Université Joseph Fourier - Grenoble I

Contents

INTRODUCTION

Ce petit document a pour seule ambition de conférer un contenu intuitif clair aux notions fondatrices de la relativité générale. Il se place au niveau du premier cycle universitaire et ne nécessite aucune connaissance préalable sur le sujet.

Les idées de la relativité restreinte sont d'abord brièvement présentées. Sans entrer dans les conséquences de cette belle théorie nous montrons quelle est son origine et les révolutions conceptuelles qui y sont liées. La transformation de Lorentz n'est pas postulée mais établie à partir des symétries fondamentales de l'espace-temps.

La relativité générale est alors introduite comme une extension du modèle au cas des référentiels non inertiels. La construction des équations d'Einstein est brièvement présentée ainsi que le sens du tenseur de Riemann, en insistant sur le caractère révolutionnaire de ce lien entre géométrie et contenu.

La métrique de Schwarzschild est alors considérée comme un exemple de solution aux équations de champ de la relativité générale applicable simplement à la physique des trous noirs. Les propriétés les plus remarquables sont rapidement passées en revue en insistant sur les aspects qui s'inscrivent en faux par rapport à l'intuition.

1 Relativité restreinte

1.1 Notion d'intervalle

Pour pouvoir décrire les phénomènes naturels, il est nécessaire de définir des systèmes de référence ou référentiels. On entend par cela un ensemble de coordonnées permettant d'indiquer les positions spatiales et temporelles.

Postulat (et définition): Il existe des référentiels dans lesquels le mouvement libre des corps s'effectue à vitesse constante (vectoriellement). Ils sont nommés référentiels **inertiels**. Il est à noter qu'en réalité on peut introduire les référentiels d'inertie de façon plus élégante et plus naturelle à partir des propriétés de symétrie d'espace-temps.

Principe de relativité (expérimental): les lois de la Nature sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie.

En mécanique classique, on utilise l'énergie potentielle pour décrire l'interaction mutuelle des corps. Celle-ci dépend directement des coordonnées (x, y, z) et cela implique nécessairement une **propagation instantanée** des interactions puisqu'aucun terme de "retard" n'apparaît dans les équations, ce qui est contradictoire avec l'expérience. La relativité restreinte tenant compte d'une vitesse maximale pour les interactions, une nouvelle description est nécessaire.

On peut donc définir la théorie de la relativité restreinte comme la conjonction du principe de relativité précédent et de la prise en compte de la finitude de la vitesse de propagation des interactions. Il s'ensuit que la célérité de la lumière c est une constante universelle. Toute la physique doit alors être reconstruite: la transformation de Galilé en mécanique classique compose trivialement les vitesses, ce qui ne peut être que contradictoire avec l'existence d'une limite absolue. Il est nécessaire de se convaincre que dans une telle approche, le problème ne peut venir **que** du caractère absolu du temps en mécanique classique.

Essayons de montrer sommairement les idées sous-jacentes à la construction de la transformée de Lorentz qui peut être simplement déduite d'arguments élémentaires. Soient K et K' deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Soient deux événements (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) correspondant au départ et à l'arrivée d'un signal dans K. La distance parcourue par le signal dans K est $c(t_2 - t_1)$. Elle vaut aussi:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

On a donc dans K:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

On peut observer ces deux événements depuis un référentiel K' et y mener le même raisonnement. On obtient alors:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0$$

Pour deux événements quelconques, on appelle intervalle

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Soit, pour deux événements très proches:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Du point de vue formel, l'intervalle est une distance dans un espace pseudo-Euclidien (à cause du signe -) quadri-dimentionnel.

La nullité de l'intervalle ($ds = 0$) dans un reférentiel d'inertie implique donc sa nullité dans tout autre ($ds' = 0$). Ajouté au fait que ds et ds' sont des infiniment petits du même ordre, on peut donc écire:

$$ds^2 = a ds'^2$$

Le facteur a ne peut dépendre que du module V (vitesse relative des référentiels) et pas des coordonnées ni du temps puisque l'espace et le temps sont homogènes. Il ne peut pas non plus dépendre de la direction du vecteur $\mathbf{V}$ puisque l'espace est isotrope. Considérons trois référentiels K, K_1, K_2. Soient $\mathbf{V_1}$ la vitesse de K_1 par rapport à K et $\mathbf{V_2}$ la vitesse de K_1 par rapport à K.

$$ds^2 = a(V_1)ds_1^2;\ ds^2 = a(V_2)ds_2^2;\ ds_1^2 = a(V_{12})ds_2^2$$

donc:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12})$$

Or, V_{12} dépend non seulement des valeurs absolues des vecteurs $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$ mais aussi de leur angle relatif. Mais celui-ci ne figure pas dans l'expression $\frac{a(V_2)}{a(V_1)}$. Cette relation ne peut dont être vérifiée **que** si a(V) se réduit à une constante qui doit être égale à 1 (il suffit de considérer la transformation entre un référentiel et lui-même). Donc

$$ds^2 = ds'^2$$

L'intervalle est le même dans tous les référentiels d'inertie. Les intervalles à carrés positifs, $s^2 > 0$ sont dits du genre temps et ceux à carrés négatifs $s^2 < 0$ du genre espace. Il est bien évident que seuls ceux de carrés positifs décrivent des points d'espace-temps qui peuvent être causalement liés.

Cette conservation de l'intervalle a de très nombreuses conséquences, en particulier la dilatation du temps et la contraction des longueurs. Les concepts kantiens d'espace et de temps absolus, donnés "en soient", sont clairement incompatibles avec la relativité. Donnons un bref exemple: soit une horloge en mouvement pendant un temps dt mesuré depuis le référentiel d'inertie du laboratoire lui permettant de parcourir la distance $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Le carré de l'intervalle vaut $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Si maintenant on l'évalue dans le référentiel lié à l'horloge, le temps écoulé est dt' et les déplacements $dx' = dy' = dz' = 0$ puisque l'horloge est au repos dans son propre repère ! L'intervalle vaut donc ici $ds'^2 = c^2dt'^2$. En écrivant la conservation de l'intervalle ($ds = ds'$), on obtient: $dt' = dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}}$, soit $dt' = dt\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ où V est la vitesse. Donc $dt' \neq dt$! Un exemple de ce phénomène est celui des muons cosmiques: ces particules sont crées dans la haute atmosphère terrestre et le temps mis pour atteindre le sol est nettement supérieur à leur temps de vie. Ils ne devraient donc pas être vus. Et pourtant, ils le sont ! Parce que le temps se dilate et celui écoulé dans leur référentiel propre est bien inférieur à leur temps de vie. On peut s'amuser à calculer de même combien de temps vivrait (mesuré sur Terre) un homme qui aurait un temps de vie propre de 70 ans soumis à une accélération constante de 1g (c'est très confortable, juste la gravité artificielle): ca fait environ 100 milliards de fois l'âge de l'Univers ! Beaux voyages dans le futur en perspective...

1.2 La transformation de Lorentz

Les transformations de Lorentz décrivant les changements de référentiels inertiels doivent donc assurer l'invariance de ces intervalles, c'est-à-dire la distance entre les points d'univers dans l'espace quadridimentionnel. De telles transformations (assurant l'invariance des longueurs) sont des translations ou des rotations. Les translations sont sans intéret car elles se réduisent à un changement d'origine de l'espace et du temps. Il s'agit donc de rotations du quadrisystème x, y, z, t. Considérons (par exemple) le plan (t,x). $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ s'écrit:

$$x = x'\mathrm{ch}\psi + ct'\mathrm{sh}\psi$$

$$ct = x'\mathrm{sh}\psi + ct'\mathrm{ch}\psi$$

Il est à noter qu'on utilise des formules de trigonométrie hyperbolique et non sphérique à cause du caractère pseudo-euclidien de l'espace. Cette rotation a quelque chose de tout à fait singulier: c'est une rotation entre l'espace et le temps ! C'est une rotation qui change de l'espace en temps et du temps en espace. Rien à voir donc avec un simple mouvement circulaire... Ecrivons le mouvement de l'origine de K' dans K (mouvement parallèle à (0x)): x'=0 et donc

$$x = ct'\mathrm{sh}\psi$$

$$ct = ct'\mathrm{ch}\psi$$

soit:

$$\frac{x}{ct} = \mathrm{th}\psi \quad \text{ou} \quad \mathrm{th}\psi = \frac{V}{c}$$

soit:

$$\mathrm{sh}\psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

soit:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

On retiendra que cette démonstration simple et naturelle des expressions souvent postulées que la transformation de Lorentz se fonde sur les notions d'homogénéité de l'espace-temps et d'isotropie de l'espace. Ces symétries de la nature jouent un rôle fondateur.

Enfin, il faut noter que moyennant un formalisme mathématique un peu plus lourd, il est possible de démontrer ces formules sans postuler la finitude de la vitesse de propagation des interactions mais, au contraire, en la déduisant de la structure de groupe de ces transformations.

2 Relativité Générale

2.1 Principe d'équivalence

La propriété la plus remarquable du champ gravitationnel est sans doute la suivante: **tous les corps, quelles que soient leurs masses, s'y meuvent de façons identiques** à conditions initiales données (en résumé: dans $m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$, les m se simplifient, ce qui ne serait bien-sûr pas le cas dans un champ électrostatique par exemple). Cette remarque permet d'établir une analogie essentielle entre le mouvement des corps dans un champ de gravitation et le mouvement des corps libres mais placés dans un référentiel non inertiel (ils s'y déplacent en effet tous de la même façon).

Les caractéristiques du mouvement dans un référentiel non inertiel sont donc les mêmes que dans un référentiel d'inertie où règne un champ de gravitation. Le référentiel non inertiel est similaire à un champ de gravitation. Cette remarque, qui peut paraître de simple bon sens, est l'énoncé du **principe d'équivalence**. Il faut néanmoins noter que les champs auxquels sont équivalents les référentiels non inertiels sont pas absolument identiques aux champs de gravitation 'réels' dans les référentiels d'inertie: ils diffèrent par leurs propriétés à l'infini. Le champ gravitationnel tend, en effet, toujours vers zéro alors que les champs équivalents des référentiels vont au contraire croître (penser à une rotation) ou rester constant. Par un choix convenable du référentiel, on peut donc assurer l'élimination du champ de gravitation **dans une région donnée** de l'espace, suffisamment petite. Il suffit d'animer le référentiel d'une accélération égale à celle qu'acquiérerait une particule dans cette zone (quelle que soit sa masse, c'est le point clef).

Les remarques précédentes reposent sur une description purement classique du champ de gravitation. Mais la propriété de base (i.e. l'identicité du mouvement de tous les corps) reste valable en mécanique relativiste. Il faut néanmoins maintenant tenir compte de la dépendance spatio-temporelle requise par la transformation de Lorentz. Dans un référentiel d'inertie utilisant un système de coordonnées cartésiennes, l'intervalle ds est défini par:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

L'intervalle, comme on l'a montré, conserve sa forme lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre (i.e. lors d'une transformation de Lorentz). Mais si l'on passe à un référentiel non inertiel, l'intervalle n'a plus aucune raison de conserver cette écriture. Il suffit de prendre une simple rotation uniforme pour se convaincre que le ds^2 obtenu ne se laisse pas réduire à une somme de carrés des différentielles, quelle que soit la transformation du temps. Dans un référentiel non inertiel, le carré de l'intervalle est une forme quadratique générale des différentielles des coordonnées:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

où les $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions des coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3 et du temps x^0. Le système de coordonnées quadridimensionnel obtenu est donc **courbe** lorsqu'on utilise des référentiels non inertiels. Les quantités $g_{\mu\nu}$ qui déterminent toutes les propriétés géométriques définissent la **métrique** de l'espace-temps. Dans un référentiel d'inertie utilisant les coordonnées cartésiennes, $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$. Ces valeurs particulières sont dites galiléennes.

Le champ gravitationnel réel étant décrit comme le passagee à un référentiel non inertiel, il entraîne une modification de la métrique de l'espace-temps. Cette conclusion extrêmement importante signifie que les propiétés **géométriques** de l'espace-temps (i.e. sa métrique) **sont déterminées par les phénomènes physiques et ne sont pas des propriétés immuables de l'espace et du temps**. C'est une révolution.

Comme en mécanique non relativiste, il existe une différence fondamentale entre les champs gravitationnels réels et les champs auxquels sont équivalents les référentiels non inertiels. Lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un référentiel non-inertiel, les quantités $g_{\mu\nu}$ se déduisent des valeurs galiéennes par une transformation de coordonnées. A l'aide de la transformation inverse, on peut se ramener aux valeurs galiléennes dans tout l'espace. Mais il est primordial de se convaincre que c'est là une forme **très particulière** des $g_{\mu\nu}$: la transformation de 4 coordonnées seulement ne permet pas, dans le cas général, de conférer aux 10 $g_{\mu\nu}$ (10 seulement et non pas 16 car la matrice est symétrique) une forme fixée à l'avance. Le champ réel ne peut donc pas être éliminé par une simple transformation des coordonnées. En présence d'un champ de gravitation, l'espace-temps est tel que les quantités $g_{\mu\nu}$ qui déterminent sa métrique ne peuvent être amenées par aucune transformation des coordonnées à leur forme galiléenne **dans tout l'espace**. Un tel espace est dit **courbe**, à la différence de l'espace-temps plan dans lequel cette réduction est possible. Mais en un point donné, une transformation appropriée des coordonnées permet toujours de réduire à la forme galiléenne les $g_{\mu\nu}$ de l'espace-temps non galiléen (cela vient du caractère constant des coefficients de la forme quadratique).

La théorie de la relativité générale suggère de penser le mouvement des corps sous l'influence d'une force gravitationnelle comme un déplacement libre dans un espace-temps courbe. Dans une telle géométrie, les lignes droites doivent être remplacées par des géodésiques (en tant que plus court chemin). Ainsi, la masse et l'énergie déterminent la géométrie de l'espace-temps et celle-ci détermine le mouvement des corps. La matière dicte la courbure et la courbure dicte en retour le mouvement de la matière.

2.2 Les équations d'Einstein

Pour décrire la courbure, il existe un "outil" particulièrement adapté qu'on appelle tenseur de Riemann. Le concept de tenseur est en fait très simple. Ce sont des ojets mathématiques qui se transforment correctement lors des changements de systèmes de coordonnées. Pour être très général, on pourrait dire qu'ils permettent de faire en sorte que les équations les faisant intervenir restent valable quel que soit le système gaussien utilisé en espace courbe. En fait, on peut résumer en considérant qu'un tenseur de rang n (faisant intervenir n indices libres) est un objet qui se transforme comme le produit de n coordonnées (qui, elles-mêmes, suivent la transformation de Lorentz). Le tenseur de Riemann est ainsi un être mathématique à 4 indices $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ qui renseigne sur la courbure en permettant, en particulier, de calculer la séparation entre les géodésiques, c'est-à-dire entre les plus courts chemins joignant les points. Comme on peut s'y attendre son expression fait intervenir le tenseur métrique qui est l'objet géométrique fondamental. Elle fait aussi intervenir des entités plus techniques: les coefficients de connection. Ces derniers intègrent, entre autre, le fait que la dérivée d'un vecteur n'est pas, en général, un tenseur.

Par ailleurs, on peut construire un autre tenseur, de rang 2, qui rend compte du "contenu" de l'espace-temps. Il fait intervenir la densité et la pression (ce qui n'est pas étonnant puisque celle-ci correspond à un mouvement et que la relativité restreinte ne conserve pas les volumes à cause de la contraction des distances lorsque la vitesse est non-nulle). On le note $T_{\mu\nu}$ et on l'appelle tenseur énergie-impulsion.

Tout l'enjeu des équations de champs de la relativité générale consiste à établir des liens entre ces grandeurs mathématiques. Pour ce faire, il faut introduire un troisième (et dernier !) objet caractérisant complétement les propriétés géométriques liées à la gravité: le tenseur d'Einstein. Il doit être de rang 2 pour pouvoir être mis en correspondance directe avec le tenseur énergie impulsion (lui-même de rang 2), c'est l'essence même de la théorie. Il doit être symétrique parce que le tenseur métrique l'est aussi. Il doit disparaître en espace-temps plat puisqu'il caractérise la courbure. Il doit être construit avec le tenseur de Riemann, le tenseur métrique et rien d'autre. Il doit être linéaire par rapport au tenseur de Riemann (c'est une condition de "naturalité"). Enfin, il doit présenter une divergence nulle pour satisfaire une loi d'auto-conservation. Le miracle mathématique vient de ce qu'il existe une unique objet satisfaisant ces conditions ! C'est le tenseur d'Einstein, noté $G_{\mu\nu}$. Peu importe son expression exacte ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$), les propriétés précédemment mentionnées suffisent à en comprendre le sens.

Les équations de champ d'Eisntein consistent simplement à proposer le lien le plus simple possible entre la géométrie (le tenseur d'Einstein) et le contenu (le tenseur énergie-impulsion) : la proportionalité ! $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$. La valeur du coefficient de proportionalité se trouve en demandant que la limite en champ faible conduise à la théorie newtonienne. On obtient alors la plus belle équation de la physique:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

3 Trous noirs

3.1 La métrique de Schwarzschild

On peut définir le concept de trou noir en mécanique newtonienne. Il suffit de dire que ce sont des astres pour lesquels la vitesse de libération est plus grande que la vitesse de la lumière. Comme rien ne peut aller plus vite que la lumière, il s'ensuit que rien ne peut sortir d'un trou noir. Quantitativement, la condition "d'échappement" s'obtient de demandant que l'énergie cinétique soit égale à l'énergie potentielle: $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{GmM}{R_s}$ où m est la masse de la particule considérée (qui se simplifie), M la masse de l'astre et R_s la distance à laquelle elle se trouve de celui-ci. En écrivant cela pour la lumière ($V = c$), on obtient $R_s = 2GM/c^2$. Ce qui signifie que de la sphère interne à R_s, rien ne peut s'échapper. Un objet pour lequel il est possible de s'approcher à une valeur égale ou inférieure à R_s est un trou noir. Pour la Terre, par exemple, la valeur de R_s est de l'ordre du centimètre alors que son rayon est de l'ordre de 6000 km: la Terre n'est pas un trou noir !

En relativité générale, l'étude des trous noirs se fait (pour le cas le plus simple), dans le cadre de la métrique de Schwarzschild. Celle-ci décrit les systèmes statiques à symétrie sphérique. Le calcul est assez simple mais il n'est pas reproduit ici pour des raisons de concision. Il suffit d'écrire l'intervalle ds^2 en tenant compte des symétries demandées puis de fixer la forme des coefficients en utilisant les équations d'Einstein. La partie non triviale est l'écriture du tenseur d'Einstein dans la bonne base, mais la difficulté est de nature technique et non conceptuelle. On obtient alors:

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \frac{2M}{r})}.$$

Quelques remarques s'imposent. D'abord, on a ici utilisé le système d'unités naturelles, c'est à dire $G = c = 1$, ce qui permet d'alleger l'écriture. Ensuite, on a utilisé les coordonnées sphériques qui sont beaucoup mieux adaptées à la symétrie shpérique (!) du problème. Que représente exactement la coordonnée r ? Imaginons un trou noir autour duquel on batirait une coquille sphérique maillée. Comment définir la taille de la sphère associée à une telle coquille ? On peut pas mesurer la distance par rapport au centre: la règle utilisée serait "mangée" par le trou noir! Il faut faire un tour de la coquille et diviser le chiffre obtenu par 2π. C'est ce qu'on appelle la circonférence réduite et c'est le sens de la coordonnée r. La variable t, quant à elle, représente le temps à l'infini, c'est à dire mesuré loin de la source du champ. Les propriétés les plus saisissantes sont les suivantes:

1) La métrique de Schwarzschild est complète: toute description non quantique de l'espace-temps à symétrie sphérique est contenue dans cette écriture.

2) En $r = 2M$, c'est à dire $r = 2MG/c^2$ si l'on revient aux unités habituelles, il se "passe quelque chose": le terme temporel tend vers zéro et le terme spatial tend vers l'infini! On appelle cette valeur particulière $r = R_s$ le rayon de Schwarzschild (c'est l'expression newtonienne), définissant l'horizon, et on peut alors considérer un trou noir comme un objet pour lequel la région $r < R_s$ est accessible. On voit que ce n'est pas un astre ordinaire: le signe des facteurs change, ce qui signifie que "le temps devient espace" et que "l'espace devient temps". De la même façon que pour pour nous le temps s'écoule, l'espace s'écoule dans un trou noir et oblige les particules à rejoindre la singularité centrale. Tout effort contre cette chute ne peut d'ailleurs que rendre les choses plus expéditives encore: la nature maximise naturellement le temps... Ceci d'ailleurs permet de comprendre qu'un trou noir est "vide" sauf en son centre: on ne ressent rien de particulier en traversant l'horizon. La métrique de Schwarzschild décrit ainsi l'espace-temps au voisinage des trous noirs mais aussi de tout corps massif à symétrie sphérique.

3) le terme de courbure $(1-2M/r)$ tend vers 1 quand $r \to \infty$: loin de la source du champ on retrouve la métrique de la relativité restreinte.

4) le terme de courbure $(1 - 2M/r)$ tend vers 1 quand $M \to 0$: quand la masse est très petite, on retrouve également la relativité restreinte.

5) le facteur de dr^2: $1/(1 - 2M/r)$ est supérieur à 1 pour $r > 2M$. Cela signifie que la distance ds mesurée est plus grande que dr ! En effet, considérons une coquille pour laquelle on mesure une circonférence réduite (circonférence divisée par 2π) de r. Construisons à l'intérieur de celle-ci une autre coquille pour laquelle la circonférence réduite est plus petite de 1 km. Si maintenant on met une règle entre ces 2 coquilles, on ne trouve pas 1 km ! L'espace n'est pas plat, la circonférence d'un cercle n'est plus égale à 2π fois son rayon... A titre d'exemple considérons le Soleil, dont le rayon vaut 695980 km. Soient deux coquilles juste à sa surface dont la circonférence réduite diffère de 1 km. La valeur de la distance "directe" entre les deux vaudrait alors 1 km + 2 mm. Une bien petite différence...: la courbure au voisinage du Soleil est faible (mais non nulle). Mais si l'on considère maintenant un trou noir de la même masse que le Soleil et deux coquilles à quelques rayons des Schwarzschild du centre dont les circonférences réduites diffèrent de 1 km, leur écart "direct" peut atteindre 2 km ! Etrange géométrie non euclidienne... Attention, ce phénomène ne vient pas de forces qui comprimeraient les instruments de mesure mais est intrinsèque à l'espace.

6) le facteur de courbure $(1 - 2M/r)$ devant dt^2 est plus petit que 1. Il rend compte du redshift gravitationnel. En effet, cela signifie que le temps séparant deux "toc" d'horloge est vu plus petit près du trou noir que pour l'observateur à l'infini. Autrement dit, la période des ondes électromagnétiques est plus grande à l'infinie: les ondes sont décalées vers le rouge. Cela permet d'ailleurs de réinterpréter le fait qu'un trou noir soit noir: à l'horizon la période devient infinie et les rayonnements n'emportent plus d'énergie, il devient effectivement "noir".

3.2 Quelques effets intéressants

On peut montrer assez simplement que la "vitesse" pour un corps lâché sans vitesse initiale à l'infini vaut

$$\frac{dr}{dt} = -(1 - \frac{2M}{r})(\frac{2M}{r})^{\frac{1}{2}}$$

lors de sa chute sur un trou noir dont il se trouve à la distance r. A l'horizon, c'est à dire quand $r = 2M$, on voit que cette vitesse est nulle ! Autrement dit, le corps en chute libre s'arrête. Mais si maintenant on se place dans le système de coordonnées liées à un observateur qui se trouverait sur une coquille, on trouve la vitesse:

$$\frac{dr_{coquille}}{dt_{coquille}} = -(\frac{2M}{r})^{\frac{1}{2}}.$$

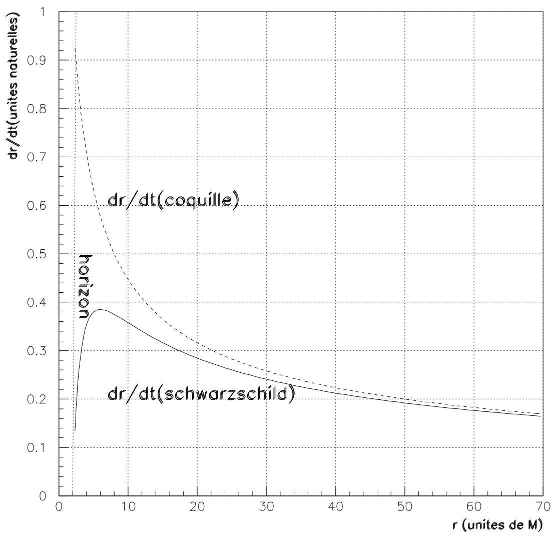

Figure 1: Vitesses pour un objet tombant sur un trou noir pour 2 types d'observateurs

Et, cette fois, à l'horizon (soit $r = 2M$), on obtient une vitesse égale à 1, c'est à dire égale à c dans les unités habituelles ! Comment concilier ces résultats contradictoires ? En se souvenant qu'il n'y a pas de système de coordonnées "absolu" en relativité générale et que le même phénomène peut apparaître comme étant à l'arrêt pour un observateur et comme étant animé de la vitesse de lumière pour un autre (cf. Fig. 1).

Combien de temps reste-t-il à vivre si l'on plonge à l'intérieur d'un trou noir ? En écrivant simplement la conservation de l'énergie, on arrive à un temps:

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{M}{c}.$$

Pour un trou noir stellaire, cela ne représente que quelques microsecondes ! Bien-sûr la dépendance linéaire en M permet d'envisager des durées raisonables dans les trous noirs supersmassifs qui se trouvent au coeur des galaxies mais les valeurs en jeux restent faibles. De toutes façons, pour les trous noirs peu massifs, les effets de marée, c'est à dire le fait que les pieds sont plus attirés que la tête, deviennent si fort au voisinage de l'horizon que la mort est antérieure au début du voyage à l'intérieur du trou noir !

La vitesse de la lumière est-elle toujours la même ? Oui, dans un référentiel en chute libre, on trouve toujours c, c'est la base de la relativté restreinte. Mais si l'on prend la métrique de Schwarzschild et que l'on écrit $ds = 0$ (pour la lumière l'intervalle est nul), on obtient:

$$\frac{dr}{dt} = (1 - \frac{2M}{r}),$$

soit une valeur différente de 1 (c'est à dire différente de c en unités habituelles) ! Ceci parce qu'on utilise dans ce cas les coordonnées "non locales": l'observateur de Schwarzschild est une sorte d'archiviste. C'est l'effet Shapiro qui a été effectivement mesuré.

3.3 Les trous noirs s'évaporent-ils ?

Un trou noir est donc un objet très massif dont rien ne peut s'échapper. Il pourrait pourtant exister des objets singuliers, les trous noirs primordiaux, contredisant précisément ces assertions parce qu'ils seraient caractérisés par une masse arbitrairement faible et une intense évaporation les conduisant à "disparaître" très rapidement ! Leur formation est impossible par les phénomènes habituels d'effondrement gravitationnel mais résulterait de fluctuations dans l'Univers jeune. Si le contraste de densité (témoignant de l'inhomogénéité) de l'Univers est suffisamment élevé, un trou noir peut se former. Cette sur-densité est à évaluer sur un volume dont la taille croît rapidement avec le temps. La masse des trous noirs résultant étant alors de l'ordre de grandeur de la masse de l'horizon, les plus légers sont ceux formés dans les tous premiers instants de l'Univers (elle peut ainsi être aussi petite que la masse de Planck, soit quelques centièmes de milligrammes). Le modèle standard de la cosmologie prévoyant une brève phase inflatoire durant laquelle les distances s'acroissent exponentiellement, seules les entités créées à l'issue de celle-ci peuvent échapper à une gigantesque dilution. La masse minimale des trous noirs primordiaux serait alors nettement plus élevée mais néanmoins très en-dessous des masses stellaires. Ces objets seraient donc des sondes exceptionnelles pour percer les propriétés du Cosmos à des temps extrêmement reculés et sur des échelles de distance particulièrement faibles. Ils constitueraient des vestiges inestimables révélant l'Univers primordial à des tailles et des temps inaccessibles aux observables habituelles de la cosmologie que sont le fond diffus de photons à 3 degrés Kelvin et les grandes structures.

La recherche expérimentale de ces hypothétiques trous noirs microscopiques est fondée sur le mécanisme d'évaporation imaginé par Stephen Hawking dans les années 1970. Les grands physiciens russes Yakov Zeldovitch et Alexandre Starobinsky avaient montré, en appliquant le principe d'incertitude de la mécanique quantique, que les trous noirs en rotation devaient émettre des particules. En formulant ce phénomène en termes mathématiques rigoureux, Hawking est parvenu à la conclusion que tous les trous noirs devaient rayonner, même s'ils ne tournent pas ! Ce paradoxe apparent trouve une interprétation intuitive quand il est tenu compte des fluctuations quantiques qui peuplent l'espace. Le principe de Heisenberg autorise, en effet, la création et l'annihilation de paires de particules virtuelles qui peuvent être de toutes natures, des gluons aux quarks en passant par les électrons et les bosons de jauge. Celles-ci, et c'est là même la définition de leur virtualité, sont habituellement destinées à s'annihiler rapidement l'une avec l'autre. Mais ici, l'une des particules peut tomber dans le trou noir, alors que sa partenaire s'échappe à l'infini en emportant de l'énergie, ce qui occasionne une perte de masse pour le trou noir. En langage imagé, on pourrait considérer que les forces dues à l'effet de marée, analogue à la déformation des océans terrestres résultant de la présence de la Lune, ont cassé la paire. Le champ gravitationnel fournit l'énergie nécessaire pour que la particule émise devienne réelle. Cette évaporation donne naissance à une distribution thermique caractérisée par la température : $T = hc^3/16\pi^2 kGM$ où h est la constante de Planck, c la célérité de la lumière, G la constante de gravitation, k la contstante de Boltzman et M la masse du trou noir. Cette relation est particulièrement élégante dans la mesure où elle réunit l'ensemble des constantes fondamentales de la physique et montre la proportionnalité inverse entre la masse et la température d'un trou noir. Pour des masses entre 10^9 g et 10^{16} g, la température varie ainsi de dix-mille GeV à un millième de GeV. Le spectre d'émission est non seulement quantitativement gouverné par la valeur de cette température mais aussi qualitativement en dictant la nature des particules émises : plus le trou noir est chaud plus il est en mesure de produire des entités de masses élevées. L'évaporation est de type explosive, la vitesse de perte de masse résultant et l'énergie caractéristique des corpuscules variant comme l'inverse du carré de la masse. Plus les trous noirs deviennent légers, plus ils s'évaporent vite, plus leur température est élevée et plus les énergies des corpuscules émis deviennent importantes ! La loi de Hawking, décrivant le spectre d'émission, ne converge pas aux faibles masses : le processus doit se poursuivre jusqu'à ce que soient atteintes des vitesses de perte de masse quasiment infinies pour une température extrêmement élevée atteinte lorsque la masse devient très petite. Il faudrait ainsi environ une seconde seulement pour assister à l'évaporation complète d'un trou noir de 1g et environ mille fois l'âge de l'Univers pour celle d'un trou noir de 10^{16}g ne représentant pourtant que la masse d'une large montagne. Le phénomène de Hawking ne concerne clairement pas les trous noirs stellaires et encore moins les trous noirs supermassifs siégeant au coeur des galaxies actives dont les temps d'évaporation peuvent être considérés comme infinis par rapport à toute les échelles caractéristiques, fussent-elles de nature cosmologique.

Les tentatives de mise en évidence expérimentale des trous noirs primordiaux reposent précisément sur la recherche des rayons cosmiques qu'ils émettent. Toute autre démarche semble vouée à l'échec parce qu'ils ne peuvent interagir directement par aucun des moyens habituels : dépourvus de charge électrique, la force électromagnétique ne leur est d'aucun secours, dépourvus des charges associées, ils sont insensibles aux forces nucléaires et leur masse est trop faible pour que les effets gravitationnels habituels soient décelables. Parmi les particules émises par les trous noirs primordiaux, certaines d'entre elles sont particulièrement adaptées à leur recherche : les photons gammas autour d'un centième de GeV d'abord, parce que l'Univers est extraordinairement transparent à ces énergies et qu'ils permettent donc de sonder des volumes considérables sans que des phénomènes d'interaction avec le milieu inter-galactique ne puisse dégrader les caractéristiques initiales du spectre émis ; les entités d'antimatière d'autre part, parce qu'elles sont très peu abondantes naturellement et qu'une faible contribution peut alors être aisément détectée.

Pour évaluer le flux de photons gammas émis par une éventuelle présence de trous noirs primordiaux dans notre Univers, il faut d'abord calculer l'émission individuelle d'un de ces objets pour une masse, et donc une température, donnée. Celle-ci provient à la fois de l'évaporation directe sous forme de rayonnement électromagnétique de grande énergie mais aussi de la désintégration de certaines particules instables émises très abondamment (en l'occurence, les pions neutres). Il faut ensuite tenir compte de la répartition en masse des trous noirs primordiaux : y a-t-il des zones de masse pour lesquels ils sont plus nombreux ? Ce dernier point est délicat puisqu'il requiert un modèle de formation des trous noirs. Le formalisme habituellement développé suppose connue la distribution de probabilité des fluctuations dans l'Univers primordial et permet donc d'évaluer, en fonction de la masse de celles-ci, le nombre de régions où la densité permet la formation d'un trou noir. Il en résulte une répartition très rapidement décroissante : les trous noirs les plus légers sont les plus nombreux, et de très loin ! Connaissant la loi de Hawking, il est alors possible de trouver la forme actuelle de la répartition en masse des petits trous noirs et de la combiner avec l'émission individuelle. Enfin, l'expansion de l'Univers induisant, de façon analogue à l'effet Doppler, un décalage spectral des rayonnements vers les basses énergies, il faut tenir compte de ce que les photons aujourd'hui attendus à une certaine énergie ont été émis au-dessus de celle-ci. L'ensemble de ces processus permet d'évaluer un flux expérimentalement attendu qui peut être aujourd'hui comparé aux mesures effectivement obtenues par les satellites de détection gamma et, au premier rang d'entre eux, le *Compton Gamma-ray Observatory* et son détecteur EGRET. Celui-ci a permis de dresser la première carte précise du ciel aux hautes énergies et l'essentiel des sources découvertes demeurent mystérieuses. Mais il a également mesuré le fond diffus gamma d'origine extragalactique et c'est ce dernier qu'il faut confronter au spectre attendu provenant d'une distribution de trous noirs primordiaux. L'absence d'excès notable autour de 0.1 GeV dans la distribution permet de donner une limite supérieure sur la quantité de trous noirs primordiaux. La densité résultante est de l'ordre du dix milliardième de celle de l'Univers, ce qui ne représente donc, au mieux, qu'une très petite partie de la masse du Cosmos. Et pourtant, cette valeur permet déjà d'obtenir des informations très importantes sur l'Univers primordial, en particulier en excluant une trop grande puissance dans les fluctuations de densité de petites tailles - celles-là même qui devraient engendrer des trous noirs microscopiques.

Outre les gammas, les petits trous noirs peuvent aussi émettre, lorsque leur masse est faible et leur température élevée, des particules chargées. Ils contribuent ainsi au rayonnement cosmique qui sillonne l'espace interstellaire. Ces rayons cosmiques "habituels" sont abondants et comportent des électrons, des protons et des noyaux plus lourds comme le carbone ou le fer. Il est pratiquement impossible de déceler, au sein de ces nombreux corpuscules - venant essentiellement des restes de supernovae - une éventuelle composante ténue due à l'évaporation des trous noirs primordiaux. Beaucoup plus intéressante, en revanche, est l'étude des anti-particules : celles-ci, en effet, sont naturellement très peu nombreuses, tandis qu'elles sont produites en quantité identique aux particules par les trous noirs en évaporation. Les antiprotons et les anti-deuterons (noyaux formés d'un antiproton et d'un anti-neutron) sont des sondes particulièrement adaptées à la recherche de trous noirs primordiaux. Ils ne sont pas émis directement : de même que les protons sont constitués de quarks, les anti-protons sont constitués d'anti-quarks. Et ce sont ces quarks et anti-quarks qui sont produits par les trous noirs suffisamment chauds, conformément à la théorie de Hawking, et s'"habillent" suivant les lois de la physique des particules pour former des entités sans couleur comme les protons et les anti-protons (entre autres). Ces processus sont bien connus et sont décrits par des approches phénoménologiques validées grâce aux mesures obtenues auprès des grands accélérateurs de particules. Par ailleurs, des détecteurs placés au-dessus de l'atmosphère terrestre dans des ballons stratosphériques ont d'ores et déjà mesuré avec une grande précision les flux d'antiprotons cosmiques et permis, là-aussi, d'obtenir une limite supérieure importante sur la quantité de trous noirs microscopiques. Celle-ci est complémentaire du résultat obtenu avec les gammas, essentiellement parce qu'elle correspond à une mesure locale - les rayons cosmiques chargés sont confinés dans notre Galaxie par le champ magnétique - tandis que les photons sont intégrés jusqu'au plus profond de l'Univers.

Pour aller au-delà de ces limites et obtenir une véritable détection des petits trous noirs, les anti-deutérons pourraient être très utiles. A basse énergie, ces noyaux ne peuvent pratiquement pas être créés par des processus conventionnels dans le rayonnement cosmique. Une véritable fenêtre de détection semble ici s'ouvrir. Elle sera, dans une certaine mesure, accessible à l'expérience AMS, mise en place sur la Station Spatiale Internationale en 2005 pour une durée de trois ans. Ce spectromètre ouvrira une nouvelle ère de précision dans la mesure du rayonnement cosmique. En cas de détection positive, la difficulté majeure pour conclure définitivement à l'existence de trous noirs primordiaux viendra d'autres sources possibles de "nouvelle physique", en particulier de l'annihilation de particules lourdes prévues par les modèles récents au-delà de la description standard.

Les trous noirs primordiaux ne sont pas que des objets astrophysiques singuliers. Ce sont aussi d'exceptionnels laboratoires de physique. Ils sont le lieu de conditions tout-à-fait extrêmes et pourraient être une sonde unique pour tester les effets de gravitation quantique, théorie qui reste toujours à construire. Lorsque, vers la fin du processus d'évaporation, la masse devient de l'ordre de grandeur de la masse de Planck (10^{-5} g) et la température voisine de la température de Planck (10^{32} K), les limites de la physique connue sont clairement atteintes. Il faut alors avoir recours à des modèles théoriques au-delà de la relativité générale. Plusieurs approches sont possibles, parmi les plus prometteuses se trouve sans doute celles consistant à généraliser la densité lagrangienne d'Einstein. Celle-ci est du premier ordre en courbure de l'espace-temps - c'est à dire linéaire - et la démarche, suivant une sorte de développement limité, consiste à ajouter des termes d'ordres supérieurs - c'est-à-dire polynomiaux - que l'on peut assimiler à des corrections. Les coefficients de ces termes peuvent être très contraints si l'on se place dans un cadre théorique plus large - en particulier dans les modèles de supercordes et de théorie-M. Certains résultats spectaculaires, comme l'existence d'une masse minimale en-dessous de laquelle l'évaporation ne peut plus se produire, apparaissent alors et ouvrent la voie à de nombreuses investigations.

Enfin, dans les approches modernes de description unifiée de la physique avec de multiples dimensions supplémentaires, de petits trous noirs pourraient être formés par la prochaine génération d'accélérateurs de particules. Si, en effet, le nombre de dimensions est suffisamment élevé (typiquement 10 ou 11) et si leur "rayon" est assez grand (typiquement un fermi pour les "nouvelles" dimensions), l'échelle d'énergie nécessaire à la formation de trous noirs pourrait être atteinte (c'est-à-dire se trouver autour de 1000 GeV) par les instruments de la génération à venir. Au premier rang d'entre eux se trouve le grand collisionneur de hadrons, LHC, actuellement en construction au CERN. Les phénomènes de micro-physique seraient alors écrantés par l'horizon des trous noirs ainsi formés et deviendraient essentiellement inacessibles. Mais la structure profonde de notre espace-temps se révélerait...