La fibration de Hopf

par

Aurélien ALVAREZ

Enseignant-chercheur à l'université d'Orléans

L'url du site de Dimensions, en particulier les chapitres 7 et 8, en lien étroit avec ce que j'ai raconté : http://www.dimensions-math.org

$x^2 + 1 = 0$

$i^2 = -1$

$\mathbb{C}: z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

$(1+i)(-2+3i) =$

$-2 + 3i - 2i + 3\underbrace{i^2}_{=-1}$

$= -5 + i$

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ corps

$z = x + iy \longmapsto x - iy = \bar{z}$

conjugaison

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$x1 + iy + jz$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1 \quad j^2 = -1$

$ij = ??$

$(1, 0, 0)$

$(0, 1, 0)$

$(0, 0, 1)$

1843

$$q = a + ib + jc + kd$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$i^2 = -1$

$j^2 = -1$

$k^2 = -1$

$\mathbb{H}$ <u>corps des quaternions</u>

$ij = k \; ; \; jk = i$

$ki = j$ $\quad kj = -i$

$ji = -k$ $\quad ik = -j$

$$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$q = a + ib + jc + kd$$

$$\mapsto \bar{q} = a - ib - jc - kd$$

$$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0 \quad q \neq 0$$

$$(1 + 2i - 3k)(i + j + k)$$

$$= \cancel{i} + \cancel{j} + \cancel{k}$$

$$\cancel{-2} + \cancel{2k} - \cancel{2j}$$

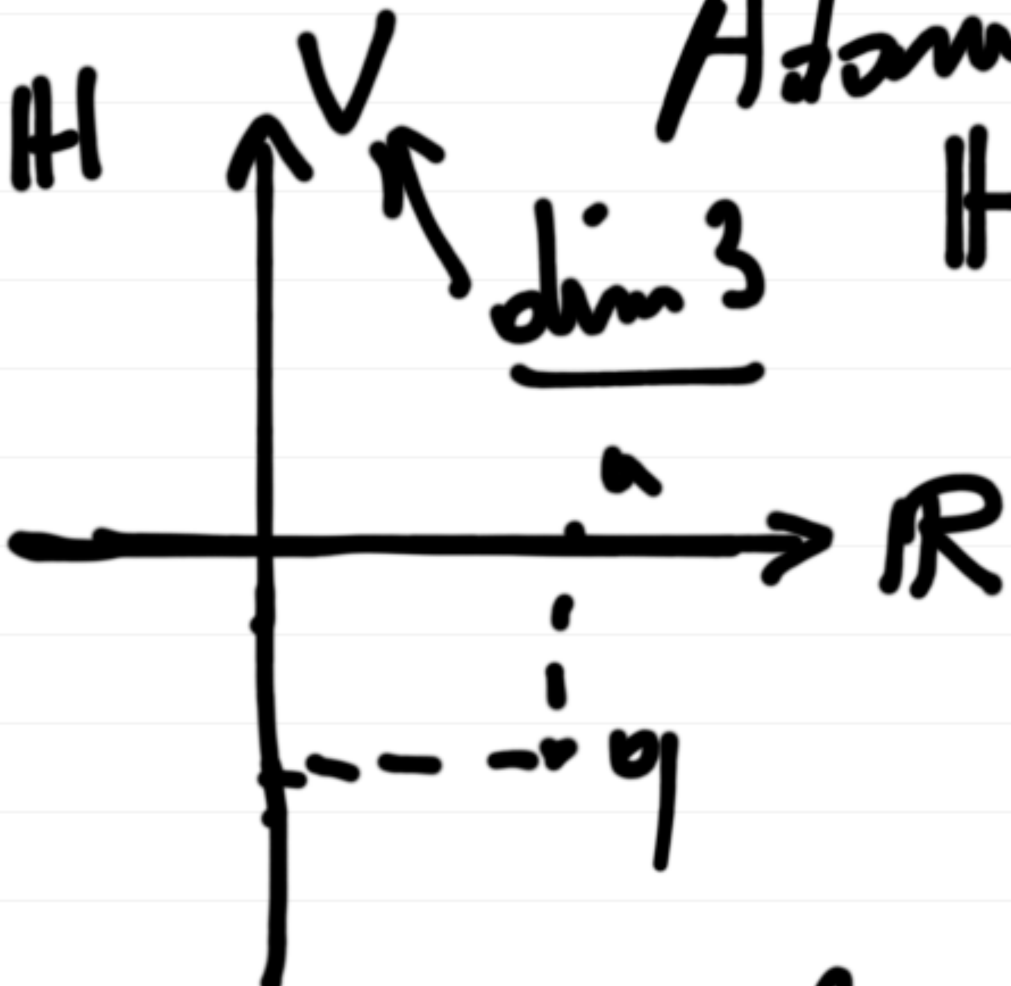
$$\cancel{-3j} + \cancel{3i} + \cancel{3}$$

$$= 1 + 4i - 4j + 3k$$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$

Adams 1960

$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus V$



$$q = \underbrace{a}_{\substack{\text{réel} \\ \mathbb{R}}} + \underbrace{ib + jc + kd}_{\substack{\text{vectoriel} \\ V}}$$

$a = 0$ quaternion pur

$$\mathbb{S}^3 = \{ q \in \mathbb{H} \, ; \, q\bar{q} = 1 \}$$

$$q = a + ib + jc + kd$$

$$q\bar{q} = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}_{\|(a,b,c,d)\|^2}$$

sphère unité dans $\mathbb{R}^4$

$p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$p = ix + jy + kz$

r quaternion $\neq 0$

$R_r : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \cancel{\mathbb{H}}\ \mathbb{R}^3$

$p \longmapsto r p r^{-1}$

$$q = a + ib + jc + kd$$

$$\bar{q} = a - ib - jc - kd$$

<u>pur</u> si $a = 0$

$$\Leftrightarrow \bar{q} = -q$$

$$\overline{r p r^{-1}} \qquad \boxed{\overline{qq'} = \bar{q'}\bar{q}}$$

$$\overline{ij} = \bar{k} = -k$$

$$\bar{i}\,\bar{j} = (-i)(-j) = k$$

$$\overline{r^{-1}}\,\bar{p}\,\bar{r} = r\,\bar{p}\,r^{-1} = -p$$

$r \neq 0$

p quat pur

alors $r p r^{-1}$ pur

$r \neq 0$

$R_r : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$p \longmapsto r p r^{-1}$

R_r linéaire

$R_r(p+p') = R_r(p) + R_r(p')$

$\| r p r^{-1} \| = \| p \|$

conserve la norme

$\rightarrow$ isométrie $\mathbb{R}^3$

R_r rotation $\mathbb{R}^3$

$r \neq 0 \longmapsto R_r$

rotation

dans $\mathbb{R}^3$

α réel $\neq 0$

$R_{\alpha r} = R_r$

$\alpha \neq 0$

$$R_{\alpha r}(p) = (\alpha r)\, p\, (\alpha r)^{-1}$$
$$= r p r^{-1}$$
$$= R_r(p)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & SO_3(\mathbb{R}) \\ r & \longmapsto & R_r \end{array}$$

quaternions unités

rotation dans $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{r = a + ib + jc + kd}$$

$r \in S^3$ $(\|r\| = 1)$

R_r rotation

$(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$

axis ?

$a \approx$ angle ?

$$\boxed{p = bi + cj + dk}$$

$$R_r(p) = p$$

$$" \; r p r^{-1}$$

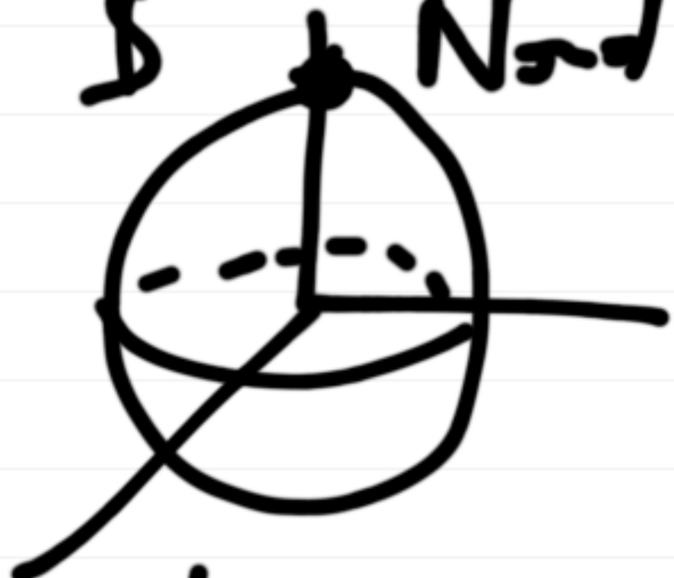
$$\boxed{\theta = 2\,\mathrm{Arccos}(a)}$$

$$r = a + ib + jc + kd$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

$\rightsquigarrow R_r$ rotation d'angle $\theta = 2\,\mathrm{Arccos}(a)$ et d'axe (b, c, d).

$\mathbb{R}^3$ S^2 Nord



Rotation $\quad R(N) \in \mathbb{R}^3$

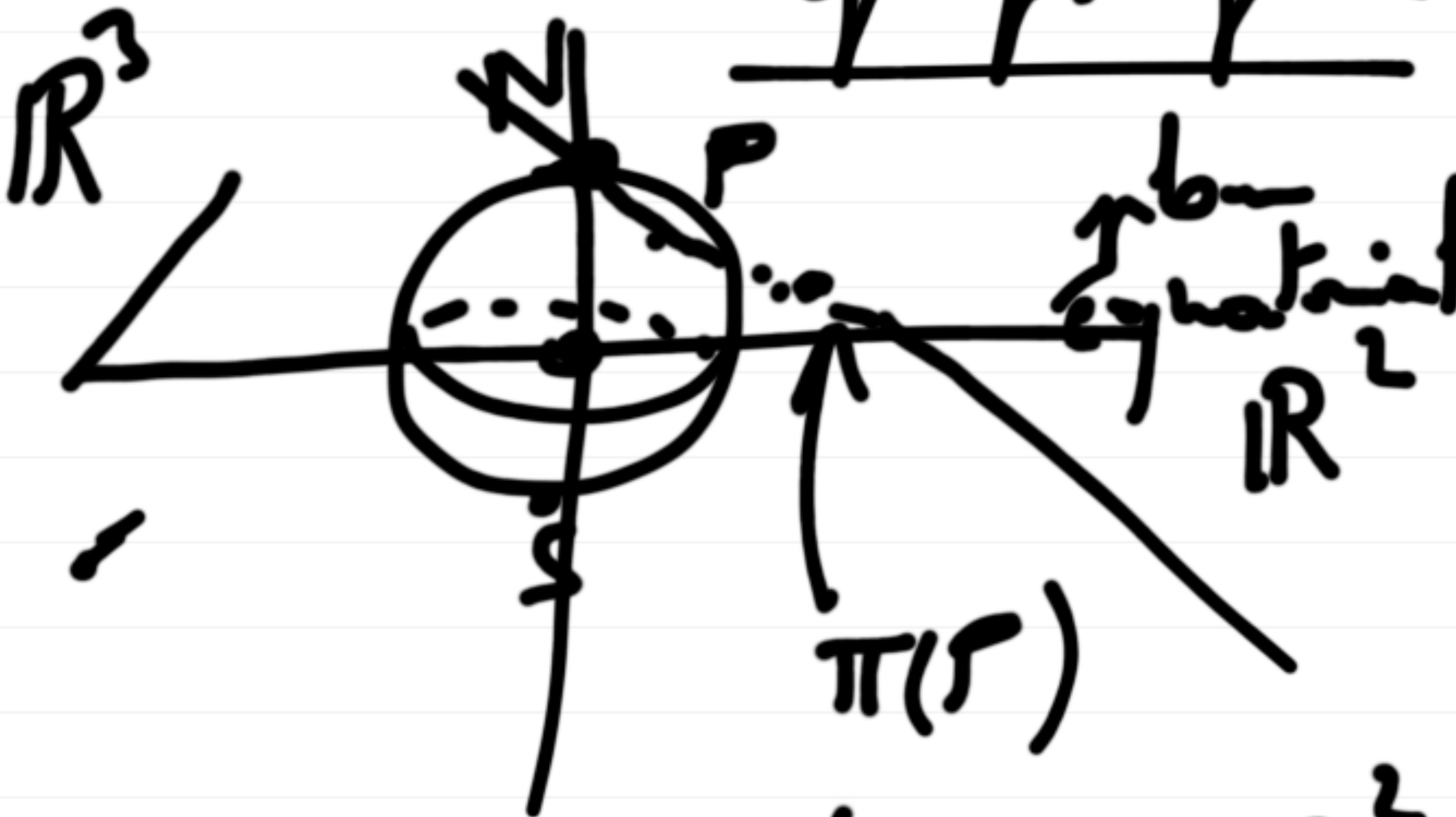
si axe $(R) \ni N$

alors $R(N) = N$

$$S^3 \longrightarrow SO_3(\mathbb{R}) \longrightarrow S^2$$

$$\boxed{h : S^3 \longrightarrow S^2}$$

Projection stéréographique



$$\pi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$(x, y, z) \neq (0, 0, 1)$

$$\pi : \mathbb{S}^3 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^3$$

<u>conforme</u>