LA RÉGULARITÉ DU HASARD

Nicolas Curien (IUF, Université Paris-Sud Orsay)

QU'EST-CE QUE LE « HASARD »
(D'APRÈS WIKIPÉDIA)

Le **hasard** exprime l'impossibilité de prévoir avec certitude un fait quelconque, c'est-à-dire prévoir ce qu'il va advenir. Ainsi, pour éclairer le sens du mot, il est souvent dit que hasard est synonyme d'« imprévisibilité », ou « imprédictibilité ».

Grande question (méta)physique : le hasard n'est-il dû qu'à nos mesures imprécises ? Les lois de la physique sont elles déterministes ou incorporent-elles une part d'aléatoire ?

JE BOTTE EN TOUCHE

LE HASARD EXISTE-IL ?

« Ce que nous appelons le hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu. » (Voltaire)

« Dieu ne joue pas aux dés. » (Einstein)

IL SEMBLERAIT QUE LE « HASARD » EST INTRINSÈQUEMENT AU COEUR DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.

NOTRE CADRE : PILE OU FACE THÉORIQUE

Pile ou Face : P pour pile et F pour face.

Les lancers sont supposés **indépendants** et la pièce est **équilibrée** (P et F ont donc une probabilité 1/2 de sortir). Voici une réalisation typique :

PPFPFFPPPPPFFPFFPFFF…

À noter que chaque suite de longueur *n* a la même probabilité d’apparaître à savoir

$$1/2 \times 1/2 \times \dots \times 1/2 = (1/2)^n = 1/2^n \, .$$

HASARD VS HUMAIN

L'HISTOIRE VRAIE D'UN PROF SADIQUE

Exercice à la maison : Tirez 100 fois à pile ou face et inscrivez la suite P/F obtenue sur une feuille de papier.

L'élève triche, comment le professeur va t-il le découvrir ?

Réponse : Dans une vraie suite aléatoire de 100 P/F il est très probable (de l'ordre de 80% de chance) d'avoir une suite de 6 piles ou de 6 faces consécutifs.

TELLEMENT IMPROBABLE QUE…

DU CASINO À LA COUR D’ASSISE

La plus longue suite de « rouge » sortie au casino l’a été en 1943 avec une suite de 33 rouges consécutifs.

Si vous êtes joueur, devez-vous parier sur rouge au prochain tirage sachant que la probabilité de voir 34 rouges consécutifs et de 1 sur 17 milliard ?

Sally Clark a deux enfants décédés de mort subite, sachant que la probabilité que cela arrive dans un couple est de 1/ 73 million. Pensez-vous qu’il s’agisse d’infanticides ?


Gene find casts doubt on double ‘cot death’ murders

An expert said there was a one in 73 million chance Sally Clark's babies died naturally – and a jury agreed. Now new genetic research could help to clear her. **John Sweeney** and **Bill Law** investigate

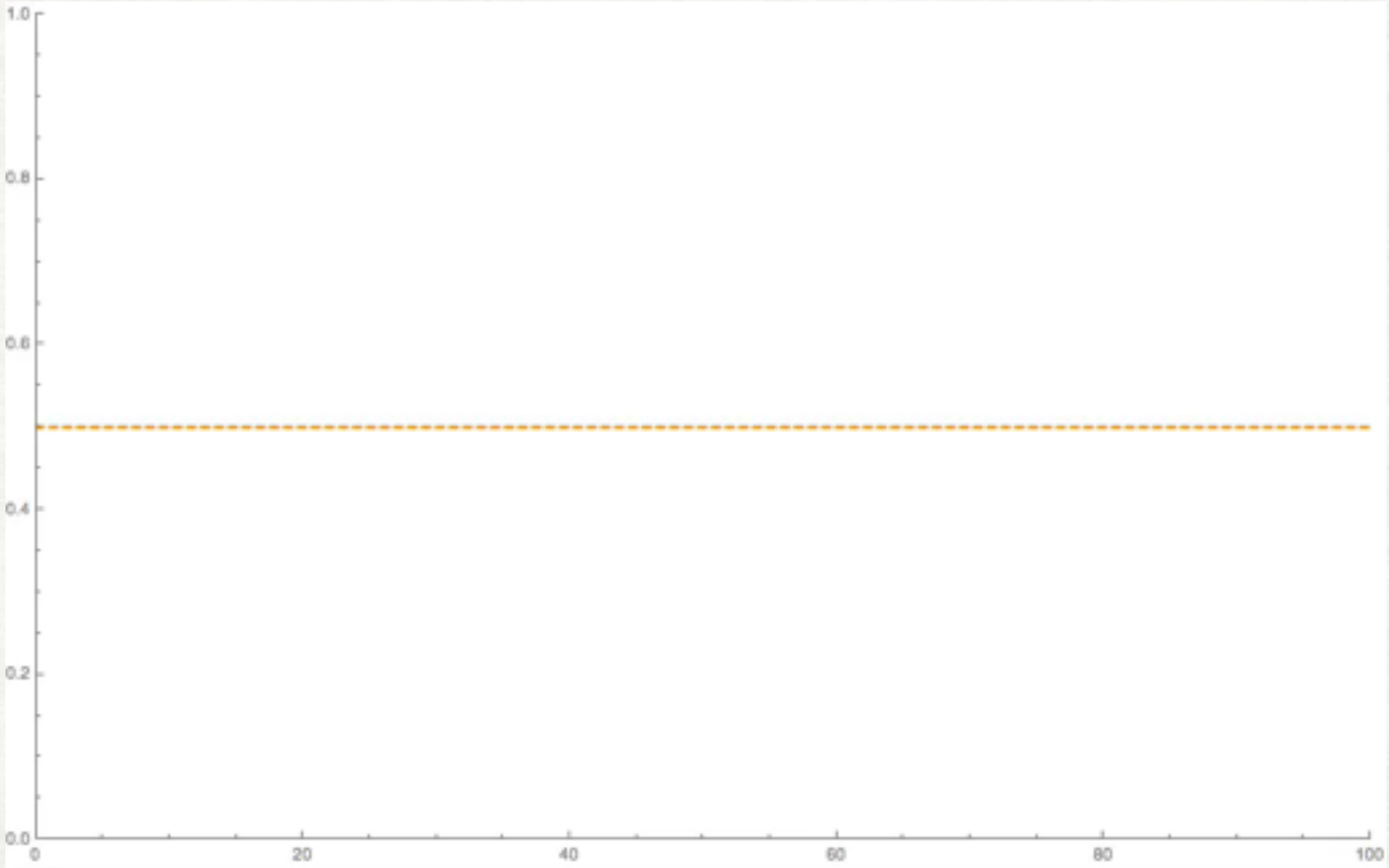

SALFORD ADVERTISER THURSDAY JUNE 13, 2002

SALFORD UNI MAN SAYS SALLY CLARK CONVICTION MAY BE WRONG

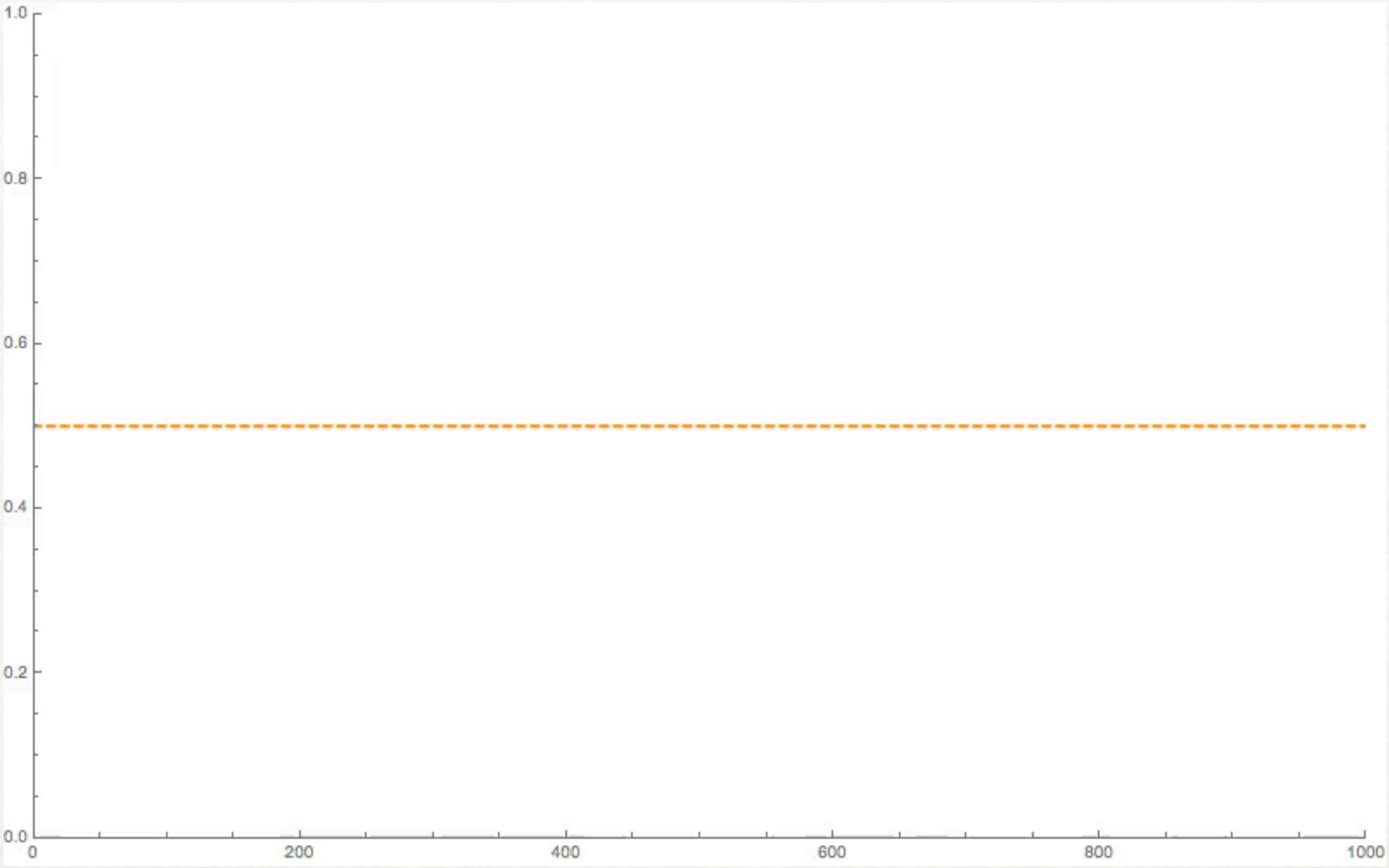
Maths professor challenges double baby murder case

LA LOI DES GRANDS NOMBRES

<u>Loi:</u> *Dans notre suite de pile/face, la proportion de pile (ou de face) converge vers 1/2. Asymptotiquement il y a grosso-modo autant de piles que de faces.*



Remarque: Si la pièce n’avait pas été équilibrée la proportion aurait convergé vers la ratio théorique.



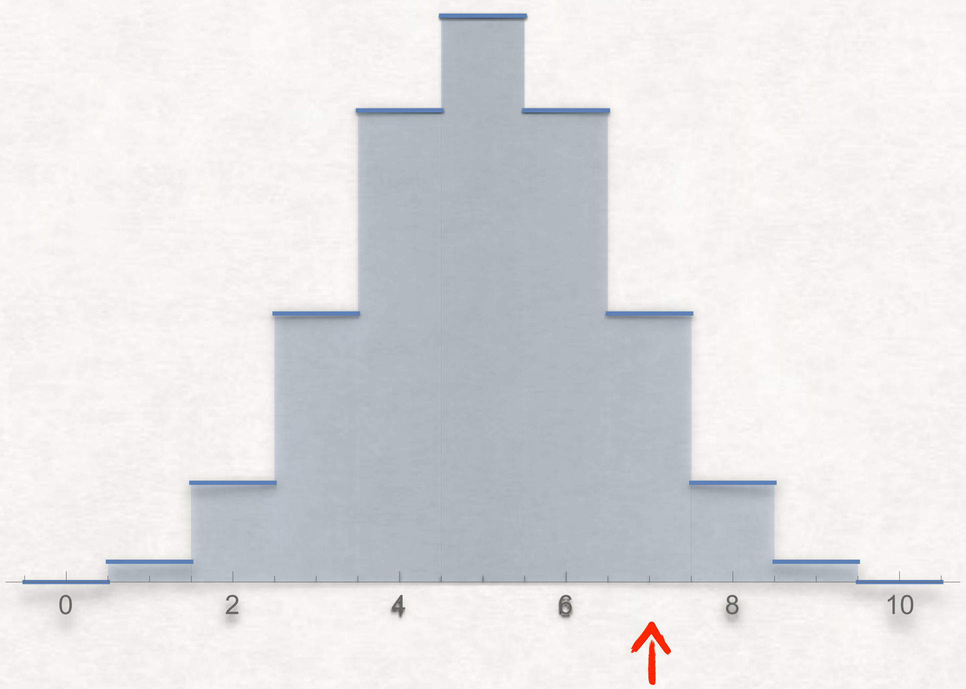
UNE ESQUISSE DE PREUVE

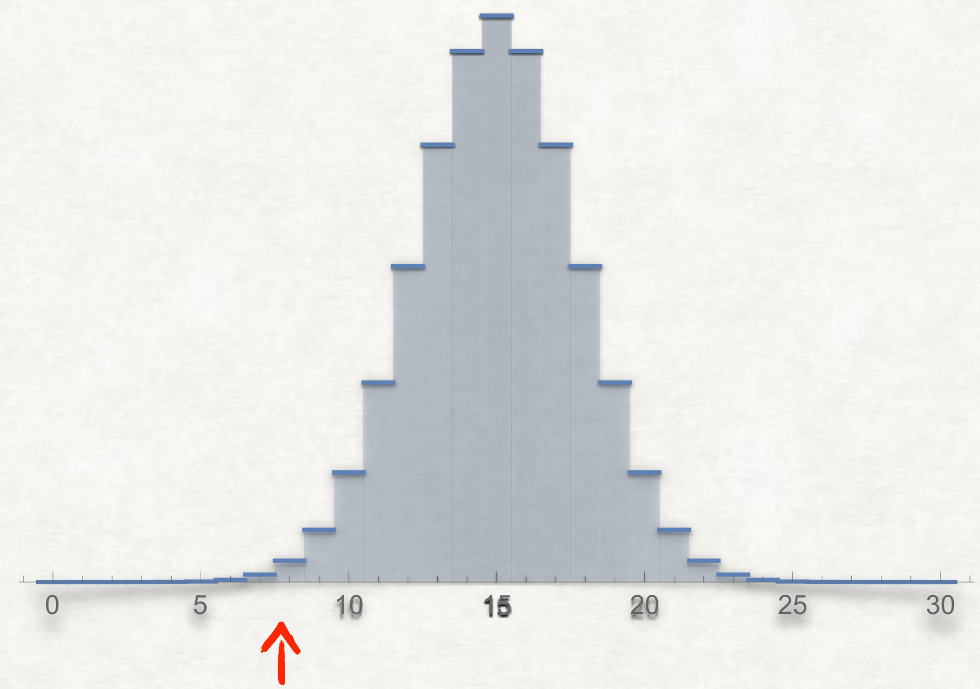
Axiomatisation: Prenons *n=1000* et rappelons-nous que chacune des $2^{1000} \approx 10^{300}$ suites de P/F de longueur 1000 sort avec la même probabilité $1/2^{1000}$. Le « hasard » ne fait que choisir une de ces possibilités uniformément, c'est tout.

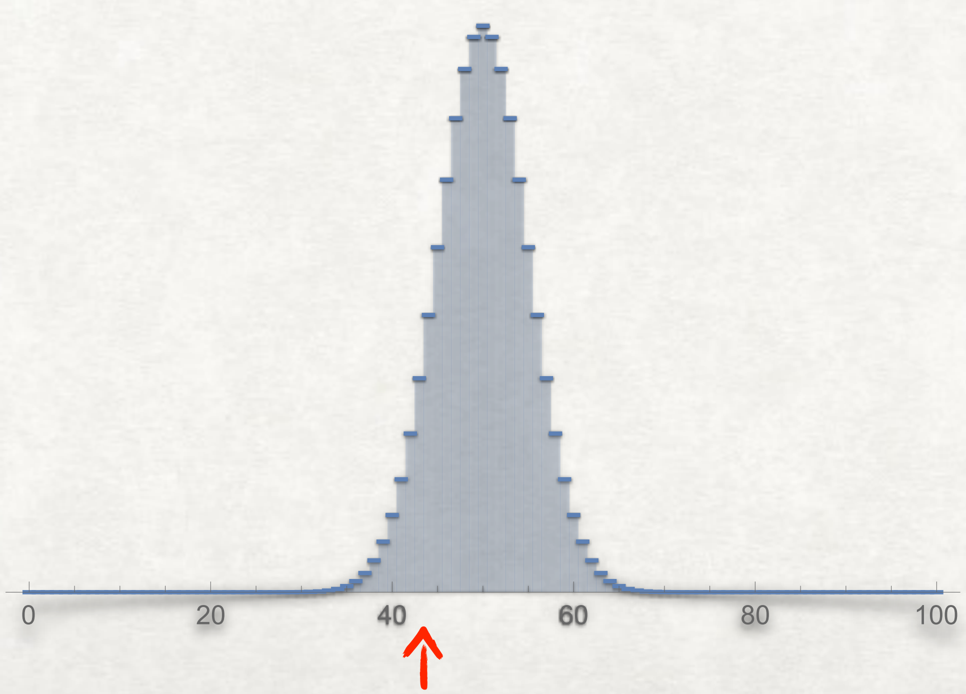
Le hasard [...] liberté absolue mais aveugle (Monod)

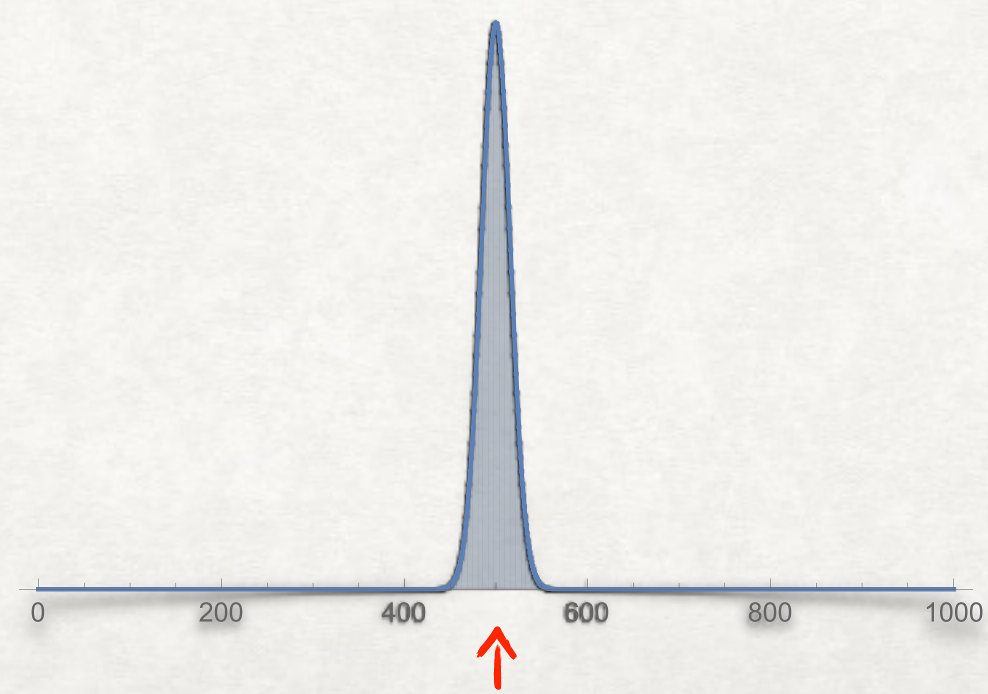
Calcul de probabilités (Combinatoire): Or, un calcul montre que parmi ces 2^{1000} suites, 99% d'entre elles sont telles que la proportion de pile est entre 49% et 51%. Ainsi avec grande probabilité le hasard choisira une suite qui a une proportion de pile entre 49% et 51%.

ILLUSTRATION









LA RÉGULARITÉ
~~DU HASARD~~
DES STRUCTURES

CONSEQUENCES

DIVERSES ET VARIÉES

Même s'il est impossible de prévoir le comportement d'**un individu**, la loi des grands nombres permet de prévoir précisément le comportement agrégé d'une **population.**

Aléatoire $\longrightarrow$ déterministe

Physique statistique des gaz

Roulette, assurance

<u>Fondement de la statistique</u>

LES STATISTIQUES

SÈTILIBABORP SEL

Théorie
un paramètre *p* connu :
la probabilité d'obtenir pile
(1/2 si pièce non biaisée)

Probabilités

Pratique
LGN : Comportement d'un
échantillon de grande taille

Théorie
Estimation du paramètre
p qui est inconnu

Statistiques

Pratique
Données connues d'un
échantillon de grande taille

UN EXEMPLE

SUIS-JE ÉQUILIBRÉ ?

On a une pièce de monnaie dont on ne sait pas si elle est équilibrée ou pas. On note p la probabilité d'obtenir pile (qui nous est donc inconnue).

On jette 1000 fois la pièce. On obtient 721 « pile » et 279 « face ».

Si la pièce était équilibrée, d'après la loi des grands nombres (établie par un calcul de probabilité) ce serait plutôt du 500 - 500. Donc vraisemblablement la pièce n'est pas équilibrée.

OUI MAIS…

DE LA NÉCESSITÉ DE QUANTIFIER

On a une pièce de monnaie dont on ne sait pas si elle est équilibrée ou pas. On note p la probabilité d'obtenir pile (qui nous est donc inconnue).

On jette 1000 fois la pièce. On obtient 521 « pile » et 479 « face ».

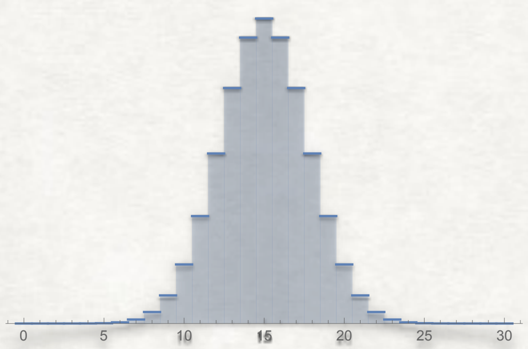
Si la pièce était équilibrée, ça se pourrait bien…

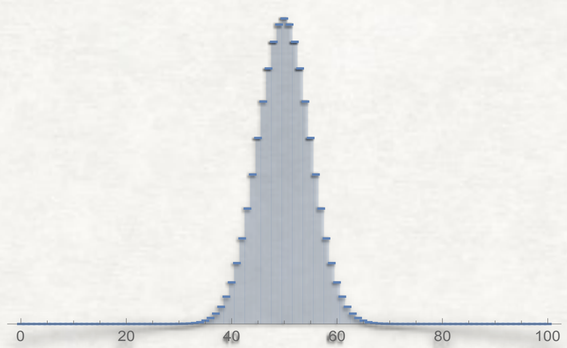
Mais c'est aussi vraisemblable si la pièce n'est pas parfaitement équilibrée mais telle que $p=0,51$.

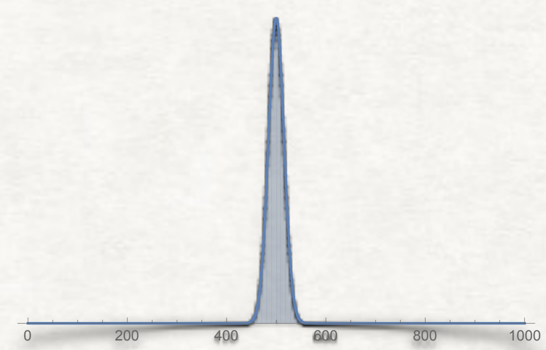
Donc on ne peut pas dire avec certitude que la pièce est parfaitement équilibrée ou pas

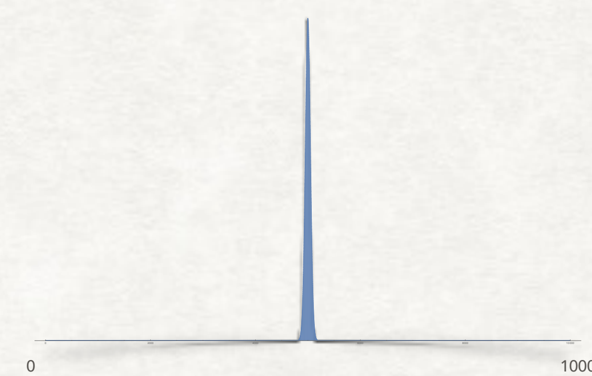
UNE NOUVELLE LOI, ENCORE PLUS FINE

LE THÉORÈME CENTRAL LIMITE



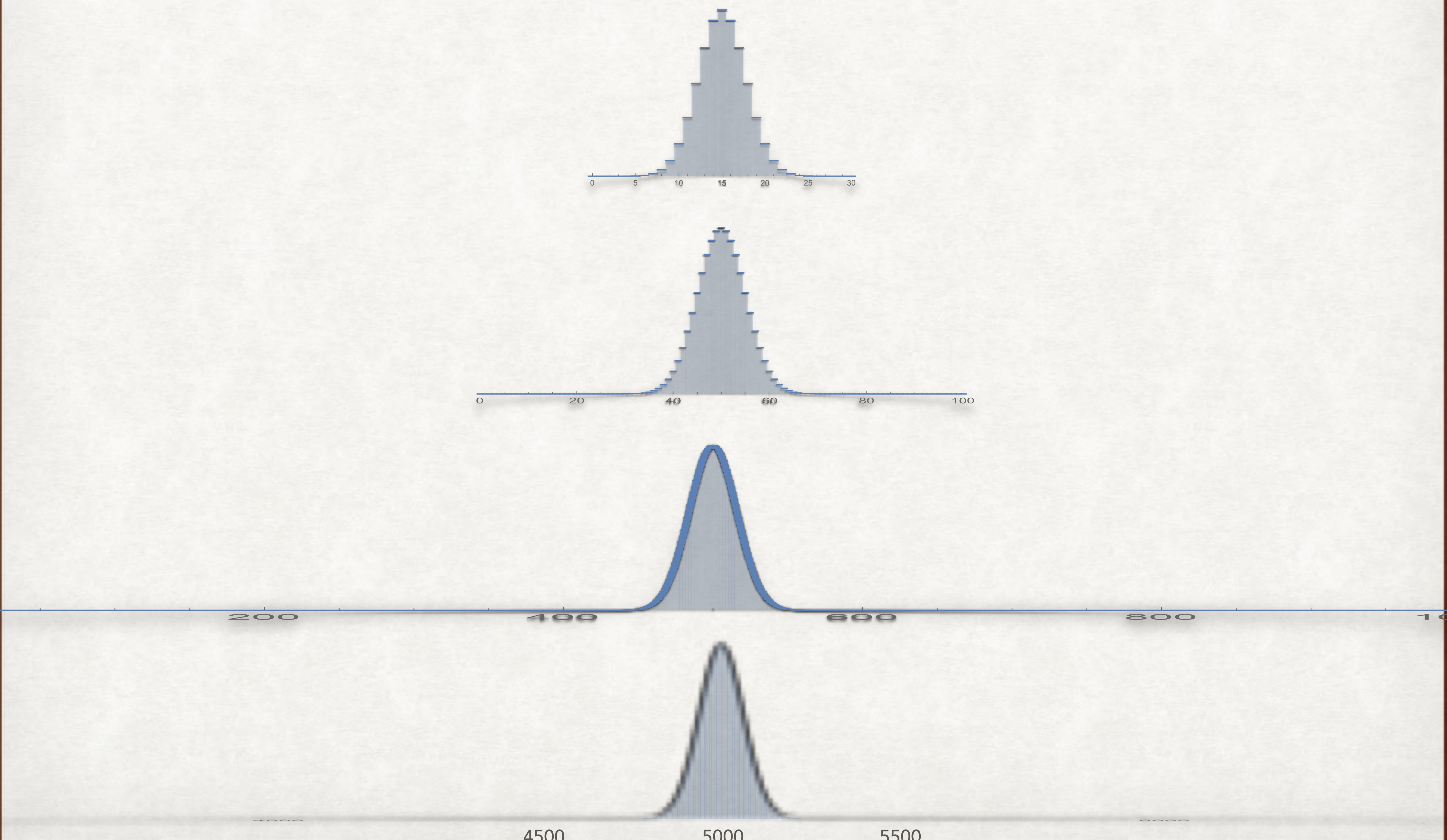






UNE NOUVELLE LOI, ENCORE PLUS FINE

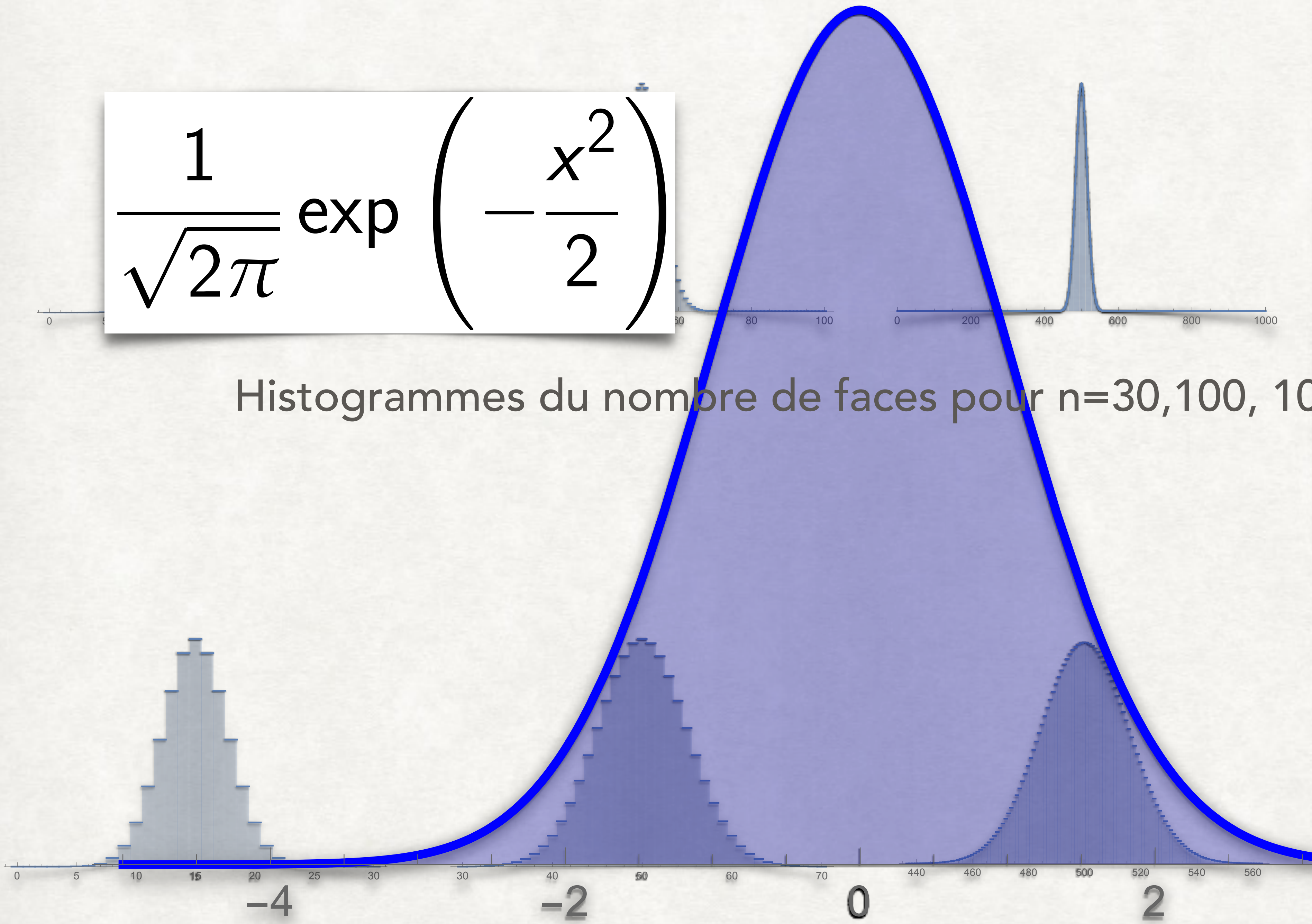
LE THÉORÈME CENTRAL LIMITE



UNE NOUVELLE LOI, ENCORE PLUS FINE

LE THÉORÈME CENTRAL LIMITE

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

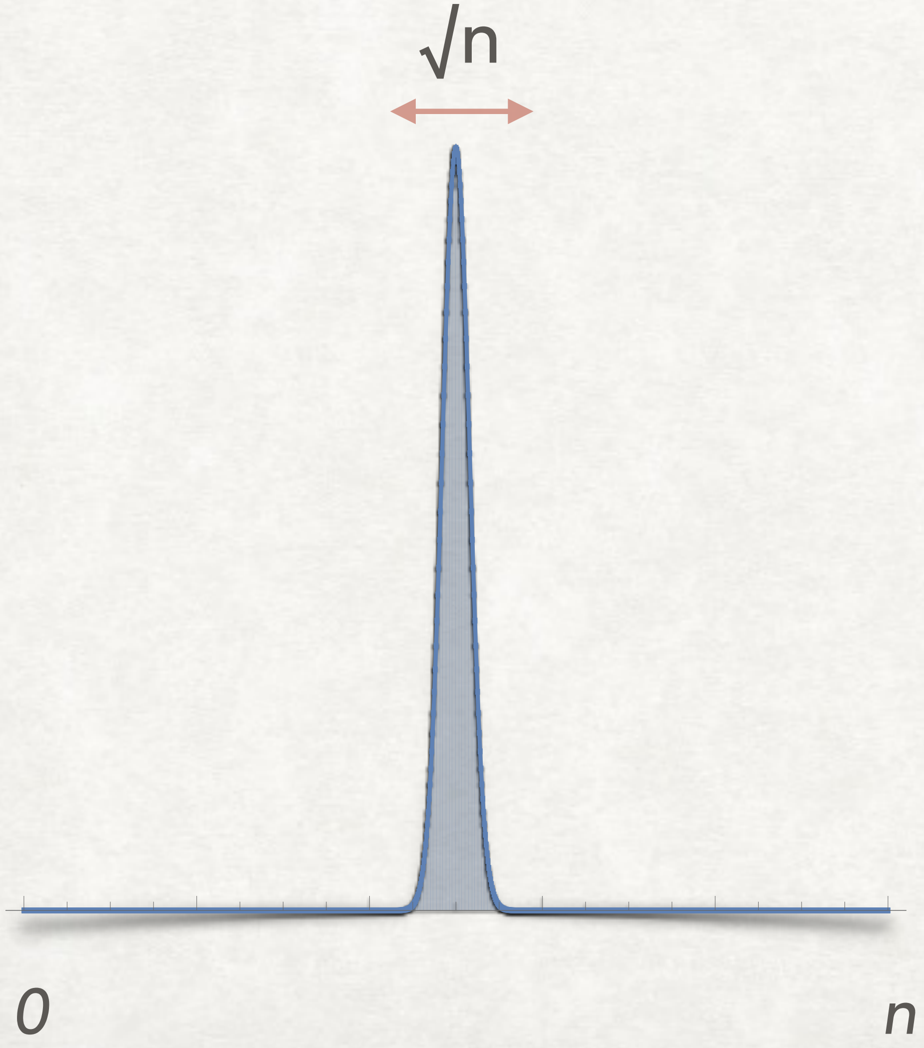


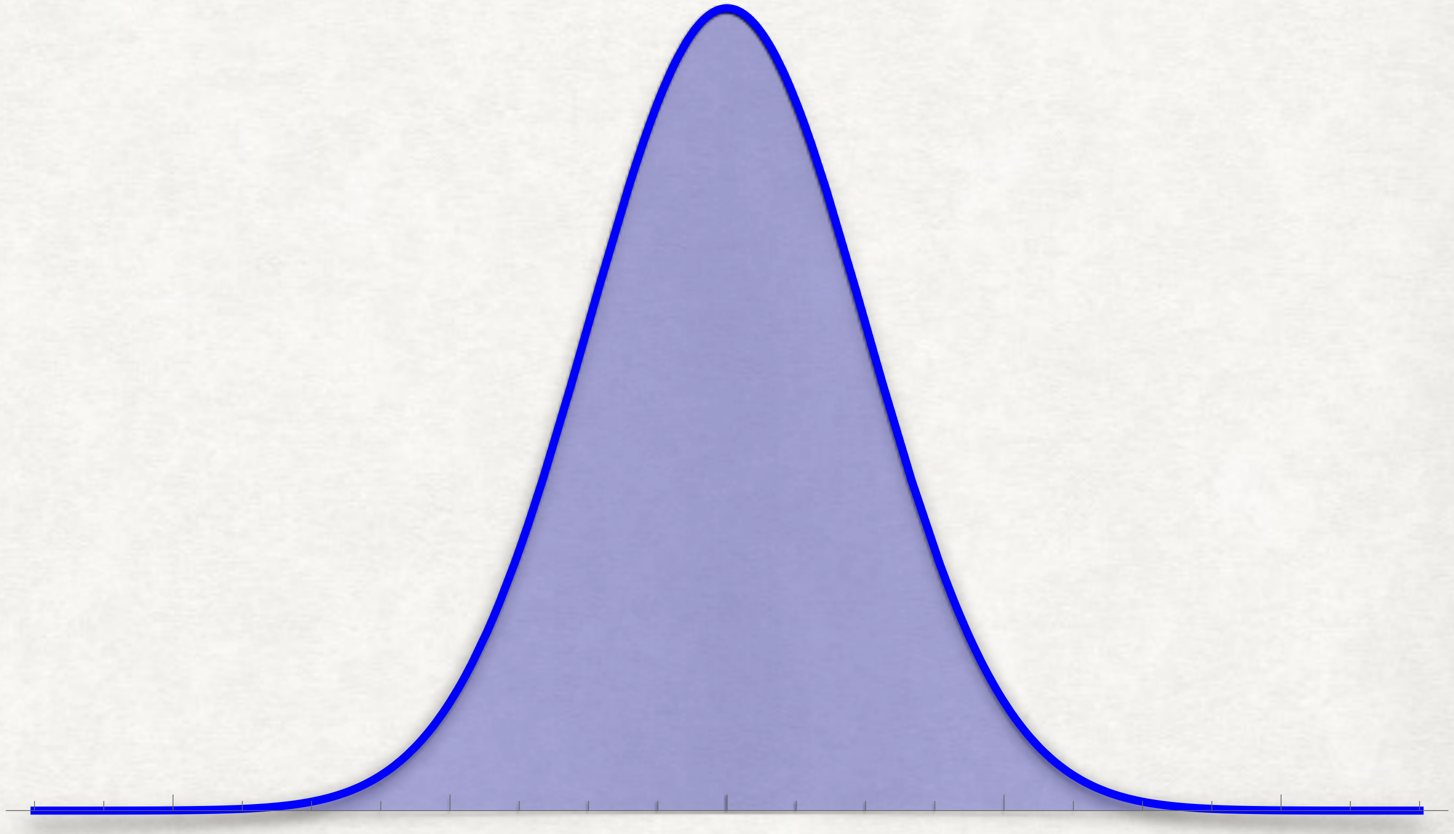
Histogrammes du nombre de faces pour n=30,100, 1000 et 10000

Les mêmes histogrammes mais centrés et dilatés autour de la moyenne

LOI DE GAUSS

<u>**Loi:**</u> *La dispersion du nombre de pile/face autour de sa moyenne est de l'ordre de la racine de la taille de l'échantillon, mieux…*





OUI MAIS… (BIS)

DE LA NÉCESSITÉ DE QUANTIFIER

On a une pièce de monnaie dont on ne sait pas si elle est équilibrée ou pas. On note *p* la probabilité d'obtenir pile (qui nous est donc inconnue).

On jette 1000 fois la pièce. On obtient 521 « pile » et 479 « face ».

Si la pièce était équilibrée, ça se pourrait bien…

D'après la loi de Gauss la proportion empirique est

$$p \pm \frac{\sqrt{1000}}{1000} \approx p + \ 3\%$$

ALLER PLUS LOIN

- Comment générer une suite au hasard ?
- Comment vérifier qu’une suite donnée est bien aléatoire ?
- L’aléatoire est UTILE et doit être compris

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

Visite de la comptabilité

Ici nous avons notre générateur de nombres aléatoires

neuf, neuf, neuf, neuf…

Êtes-vous sûr que c'est aléatoire ?

C'est le problème avec l'aléatoire : on ne peut jamais être sûr.